Decembre 2017
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Aucun document autorisé, calculatrice et téléphone interdits. Barême indicatif.

Soigner la rédaction, une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Exercice 1 (10 points)**.** Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

a) Soit $n \geq 4$. Soient τ_1, τ_2 deux transpositions de S_n. Quel peut être l'ordre du produit $\tau_1\tau_2$? Justifier.

b) Soit
$$I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \,|\, 5 \text{ divise } p(0)\}.$$

- Démontrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[x]$.
- Démontrer que I n'est pas principal.
- Démontrer que
$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{I} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}.$$

c) Soit G le sous-groupe de $O(2, \mathbb{R})$ engendré par
$$a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$
Qui est ce groupe et pourquoi?

d) Soit
$$K = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2 + \overline{2})}.$$

- Déterminer les racines du polynôme $x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.
- Démontrer que K est un corps.
- Calculer le cardinal de K et sa caractéristique. Justifier.

Exercice 2 (5 points)**.** Soit G un groupe fini. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur G en posant

$$a, b \in G, \qquad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists g \in G,\ gag^{-1} = b.$$

a) Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'equivalence.

<u>On fixe $a \in G$.</u>

b) Démontrer que

$$C_G(a) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}$$

est un sous-groupe de G.

c) Soit $[a]_{\mathcal{R}}$ la classe d'équivalence de a. Démontrer que

$$\text{Cardinal de } [a]_{\mathcal{R}} = [G : C_G(a)].$$

(On pourra considerer la fonction $f_a : G \to [a]_{\mathcal{R}},\ g \mapsto gag^{-1}$ et la relation $\sim_{f_a}$ sur G associée à cette fonction, i.e. la relation définie par $\forall g_1, g_2 \in G :\ g_1 \sim_{f_a} g_2 \Longleftrightarrow f_a(g_1) = f_a(g_2)$.)

d) Calculer $C_{S_5}((123))$.

e) Calculer le nombre de 3-cycles dans S_5 et vérifier qu'il coincide avec $[S_5 : C_{S_5}((123))]$. Expliquer pourquoi.

Exercice 3 (5 points)**.** Soit T une indéterminée et soit $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}[T]$ qui contient $\mathbb{C}, T^2$ et T^3.

a) Démontrer que

$$\mathbb{C}[T^2, T^3] = \{a + T^2 f(T) \mid a \in \mathbb{C}, f(T) \in \mathbb{C}[T]\}.$$

b) Démontrer que T^2 et T^3 sont irréductibles dans $\mathbb{C}[T^2, T^3]$.

c) En déduire que $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ n'est pas factoriel.

d) Soit $\phi : \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[T]$ le morphisme d'anneaux

$$a(x, y) \mapsto \phi(a(x, y)) = a(T^3, T^2).$$

Démontrer que si $r(x, y) = f(y) + xg(y) \in \mathbb{C}[x, y]$ (avec $f(y), g(y) \in \mathbb{C}[y]$) est un élément de $Ker(\phi)$ alors $r(x, y) = 0$.

e) Démontrer que $Ker(\phi) = (x^2 - y^3)$. (On pourra utiliser la division euclidienne de $a(x, y) \in \mathbb{C}[y][x]$ par $x^2 - y^3$ tout en justifiant pourquoi cela a bien un sens.)

f) En déduire que $x^2 - y^3$ est irréductible.

g) Démontrer que l'anneau quotient

$$\frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x^2 - y^3)}$$

n'est pas factoriel.

Exercice 4 (**BONUS.** 2 points)**.** Démontrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + 3i)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}.$$