12 décembre 2016
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Aucun document autorisé, calculatrice et téléphone interdits. Barème indicatif.

Toute réponse doit être justifiée.

Questions (7 points + 1 de bonus si au moins deux bonnes réponses).

a) Démontrer que l'idéal $I = (x + y^2, y + x^2 + 2xy^2 + y^4)$ de l'anneau $\mathbb{C}[x, y]$ coincide avec (x, y). Démontrer ensuite que l'anneau quotient $\mathbb{C}[x, y]/I$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.
b) Déterminer les idéaux de

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}[x]/(x^2), \quad ,\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3x + 2), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1).$$

Parmi ceux la, lesquels sont maximaux?
c) Soient a, b, c, d quatre éléments distincts de $\{1, ..., n\}$. Calculer dans S_n le produit $(abc) \circ (bcd)$. En déduire que, $\forall n \geq 3$, A_n est engendré par les 3-cycles.
d) Trouver la somme des racines et la somme des carrés des racines de $x^3 + 2x - 3$.
e) Démontrer que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ ne peut pas être isomorphe au groupe $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$. (Penser à $\sqrt{2}$)
f) Trouver un générateur de l'idéal $I \cap J$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$, où

$$I = (2x^3 + x + 1), \quad J = (x^2 + 2).$$

A-t-on

$$\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{I \cap J} \simeq \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{I} \times \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{J}?$$

Exercice 1 (3 points).
a) Trouver un générateur du sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par

$$\frac{21}{4} \quad \text{et} \quad \frac{35}{6}.$$

b) Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par deux éléments est cyclique. En déduire que tout sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par un nombre fini d'éléments est cyclique.
c) Trouver un sous-groupe propre de $(\mathbb{Q}, +)$ qui ne soit pas engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 2 (8 points). Soient

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a+bi\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Q}[i\sqrt{3}] = \{a+bi\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \theta = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad A = \{a+b\theta | a, b \in \mathbb{Z}\},$$

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^*_+, \qquad \alpha \mapsto \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2.$$

a) Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$ et calculer son corps des fractions.
b) Démontrer que A est un sous anneau de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et calculer son corps des fractions.
c) L'anneau quotient $A/(-3)$ est-il intègre?
d) Démontrer que les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ tels que $\varphi(\alpha) = 4$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

e) Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel.

f) Démontrer que $\varphi(A \setminus \{0\}) \subset \mathbb{N}$.

g) Démontrer que $(A, \varphi_{|A\setminus\{0\}})$ est éuclidien. Est-il factoriel?

h) Calculer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et de A. Démontrer ensuite que 2 est associé à $1+i\sqrt{3}$ dans A mais pas dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Exercice 3 (5 points)**.** Soit G le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer l'ordre de a, de b et de ab.

b) Soit H le sous-groupe de G engendré par ab. Calculer le cardinal de H. Démontrer que $ba \in H$.

c) Démontrer que $aHa^{-1} \subseteq H$, $bHb^{-1} \subseteq H$. En déduire que H est distingué dans G.

d) Lister les éléments du quotient G/H, sans répétitions. Calculer ensuite le cardinal de G.

e) Qui est G? Justifier la réponse.