

Corrigé de l'examen

Questions de cours

1. Le théorème d'existence et d'unicité des polynômes orthogonaux affirme qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(P_n)_{n \geq 0}$ telle que :
- (i) $\forall n \geq 0, \deg(P_n) = n$;
 - (ii) $\forall n \geq 0, P_n$ est unitaire;
 - (iii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Rightarrow \langle P_m, P_n \rangle_w = 0$.
2. La méthode de quadrature composée des rectangles à gauche pour une subdivision $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ d'un segment (a, b) et une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ s'écrit :
- $$\tilde{I}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$
3. La méthode d'Euler explicite pour la subdivision $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ du segment $(0, T]$ de pas constant égal à h , et pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ de condition initiale $y(0) = y_0$ s'écrit :
- $$\forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n).$$

Exercice 1

1. a. La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 3x^2 - 2x = (3x-2)x.$$

On tableau de variations se présente donc sous la forme :

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$-\infty$	-2	$-\frac{32}{27}$	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$F(0) = -2; \quad F\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27}$$

En conclusion, la fonction F possède un unique zéro $\ell \in \mathbb{R}$.

b. Nous calculons :

$$F(1) = -1, \text{ et } F(2) = 1.$$

D'après le tableau de variations précédent de la fonction F , le zéro ℓ est donc dans le segment $[1, 2]$.

2.a. Soient la fonction $y \mapsto y^{\frac{2}{3}}$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et que la fonction $x \mapsto x^2 + 2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, par composition, la fonction f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}.$$

b. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 2.$$

La fonction g est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x = x(4x^2 - 3x + 4) = x\left(\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{55}{16}\right).$$

Leur tableau de variations se présente donc sous la forme :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 2x^2 + 2 \geq x^3.$$

c. D'après la question 2.b, nous savons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 2)^{\frac{2}{3}} \geq x^3 \Rightarrow \frac{|x|}{(x^2 + 2)^{\frac{2}{3}}} \leq 1,$$

Et nous déduisons donc de la question 2.a que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

d. Nous déduisons de la question 2.c. et de l'inégalité des accroissements finis que la fonction f est $\frac{2}{3}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Comme elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que $\mathbb{R}$ est complet, le théorème du point fixe de Banach - Picard assure que les suites définies par la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n),$$

sont bien définies, et de limite l'unique point fixe a de la fonction f . En fait que $f(a) = (a^2+2)^{\frac{1}{3}}$, ce point fixe satisfait :

$$a^2+2 = a^3,$$

et il s'agit de l'unique zéro de la fonction F sur $\mathbb{R}$. En conclusion, toutes les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ sont bien convergentes de limite a .

Exercice 2

1.a. Par définition, nous calculons :

$$f(x_0) = f(-2) = e^4, \quad f(x_1) = f(2) = 1, \quad \text{et} \quad f(x_2) = f(2) = e^4,$$

puis :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - e^4}{2}, \quad \text{et} \quad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1(e^4 - 1)}{2}.$$

Enfin nous obtenons :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}(e^4 - 1) - \frac{1}{2}(1 - e^4) \right] = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

b. D'après la formule de Newton, le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_f(x)$ de la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2 est égal à :

$$\begin{aligned} L_f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= e^4 + \frac{1}{2}(1 - e^4)(x + 2) + \frac{1}{4}(e^4 - 1)x(x + 2) \\ &= \frac{1}{4}(e^4 - 1)x^2 + 1. \end{aligned}$$

1.a. Les polynômes de base de Lagrange associés aux points x_0, x_1 et x_2 sont égaux à :

$$\begin{cases} l_0(x) = \frac{x(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} = \frac{1}{8}(x^2 - 2x), \\ l_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(0+2)(0-2)} = -\frac{1}{4}(x^2 - 4), \\ l_2(x) = \frac{(x+2)x}{(2+2)(2-0)} = \frac{1}{8}(x^2 + 2x). \end{cases}$$

a. La formule du polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(x) &= f(-2) \mathcal{L}_0(x) + f(0) \mathcal{L}_1(x) + f(2) \mathcal{L}_2(x) \\ &= \frac{e^4}{8} (x^2 - 2x) + \frac{1}{4} (4 - x^2) + \frac{e^4}{8} (x^2 + 2x) \\ &= \frac{e^4 - 1}{4} x^2 + 1, \end{aligned}$$

et nous retrouvons bien la formule de la question 1-b.

Exercice 3

1. Par définition, la méthode numérique considérée s'écrit:

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

$$\text{ou } \forall 0 \leq n \leq N-1, h_n = h, \text{ et}$$

$$\forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \Phi(t, y, h) = \frac{1}{3} f(t, y) + \frac{2}{3} f\left(t + \frac{3h}{4}, y + \frac{3h}{4} f(t, y)\right).$$

Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, la fonction Φ est continue sur $(0, T) \times \mathbb{R}^2$, et il s'agit donc d'une méthode numérique à un pas. Cette méthode est explicite puisque le calcul de la valeur approchée y_{n+1} en fonction de t_n, y_n et h_n ne nécessite pas la résolution d'une équation, mais s'effectue directement à l'aide de la fonction f et des opérations élémentaires.

2.a. Nous calculons:

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{3} f(t, y) + \frac{2}{3} f(t, y) = f(t, y),$$

et cette méthode numérique est donc consistante.

b. Comme la fonction f est K -lipschitzienne en sa seconde variable, nous savons que:

$$\begin{aligned} \forall (t, y_1, y_2, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, & |\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \\ & \leq \left| \frac{1}{3} (f(t, y_2) - f(t, y_1)) \right| + \frac{2}{3} \left| f\left(t + \frac{3h}{4}, y_2 + \frac{3h}{4} f(t, y_2)\right) - f\left(t + \frac{3h}{4}, y_1 + \frac{3h}{4} f(t, y_1)\right) \right| \\ & \leq \frac{K}{3} |y_2 - y_1| + \frac{2K}{3} \left| y_2 - y_1 + \frac{3h}{4} (f(t, y_2) - f(t, y_1)) \right| \\ & \leq K |y_2 - y_1| + \frac{1}{2} K^2 |h| |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Sous la condition $|h| \leq h_{\max}$, où $h_{\max}$ est un nombre strictement positif fixé, elle est donc $(K + \frac{K^2 h_{\max}}{2})$ -lipschitzienne, ce qui assure que la méthode numérique considérée est stable.

c. Soit $h_{\max}$ un nombre strictement positif fixé. Sous la condition $|h| \leq h_{\max}$, la méthode numérique considérée est consistante et stable, donc elle est convergente par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas.

3. Supposons d'abord que la fonction f est de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. La fonction Φ est alors de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ et nous calculons:

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \Phi(t, y, 0) = f(t, y) = \frac{1}{0+2} f^{(0)}(t, y).$$

La méthode numérique considérée est donc d'ordre au moins égal à 2.

Supposons ensuite que la fonction f est de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, auquel cas la fonction Φ est de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$. Nous vérifions alors que:

$$\forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \partial_h \Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} \partial_t f\left(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}h f(t, y)\right) + \frac{1}{2} f(t, y) \partial_y f\left(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}h f(t, y)\right).$$

D'où:

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \partial_h \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} [\partial_t f(t, y) + f(t, y) \partial_y f(t, y)] = \frac{1}{2+2} f^{(2)}(t, y).$$

Par conséquent, la méthode numérique considérée est d'ordre au moins égal à 2.

Enfin, lorsque la fonction f est de classe C^3 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, la fonction Φ est aussi de classe C^3 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$, et elle satisfait:

$$\begin{aligned} \forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \partial_h^2 \Phi(t, y, h) &= \frac{3}{8} \partial_{tt}^2 f\left(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}h f(t, y)\right) + \frac{3}{4} \partial_{ty}^2 f \\ &\quad \left(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}h f(t, y)\right) f(t, y) + \frac{3}{8} f(t, y)^2 \\ &\quad \times \partial_{yy}^2 f\left(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}h f(t, y)\right). \end{aligned}$$

D'où, en général,

$$\begin{aligned} \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \partial_h^2 \Phi(t, y, 0) &= \frac{3}{8} \partial_{tt}^2 f(t, y) + \frac{3}{4} f(t, y) \partial_{ty}^2 f(t, y) + \frac{3}{8} f(t, y)^2 \\ &\quad \times \partial_{yy}^2 f(t, y) \\ &\neq \frac{1}{3} [\partial_{tt}^2 f(t, y) + \partial_t f(t, y) \partial_y f(t, y) + 2 f(t, y) \partial_{ty}^2 f \\ &\quad (t, y) + f(t, y) \partial_y f(t, y)^2 + f(t, y)^2 \partial_{yy}^2 f(t, y)] \\ &= \frac{1}{2+2} f^{(2)}(t, y). \end{aligned}$$

En conclusion, la méthode numérique considérée est d'ordre exactement égal à 2.