CY Cergy Paris Université — **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques — **2025-2026**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (3 points)

1. Étant donnée une fonction poids w continue sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, considérons le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ défini sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ par l'expression

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2,\ \langle f, g \rangle_w = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx.$$

Énoncer le théorème d'existence et d'unicité des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\geq 0}$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$.

2. Considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a,b]$. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée des rectangles à gauche pour cette subdivision, et pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

3. Pour $T > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, considérons une solution $y \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T],\ y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Étant donnés un entier $N \geq 1$, et la subdivision $(t_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par

$$\forall 0 \leq n \leq N,\ t_n = n\, h,$$

où $h = T/N$, donner la formule de la méthode d'Euler explicite pour la résolution approchée du problème de Cauchy précédent.

Exercice 1. (6 points)

1.a. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x^3 - x^2 - 1.$$

Montrer qu'il existe un unique nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $F(\ell) = 0$.

b. Vérifier que

$$1 \leq \ell \leq 2.$$

2.a. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \big(x^2 + 1\big)^{\frac{1}{3}}.$$

Vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + 2x^2 + 1 \geq x^3.$$

c. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

d. Étant donné un nombre $x_0 \in \mathbb{R}$, considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0,\, x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite ℓ.

Exercice 2. (6 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = e^{x^2},$$

et les points d'interpolation $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

1.a. Calculer les différences divisées $f[x_0]$, $f[x_1]$, $f[x_2]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$ et $f[x_0, x_1, x_2]$.

b. En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ de la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2.

2.a. Déterminer les polynômes de base de Lagrange $\ell_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_2(X)$ associés aux points x_0, x_1 et x_2.

b. À l'aide des polynômes $\ell_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_2(X)$, vérifier l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ de la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2.

Exercice 3. (5 points)

Soit $T > 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq K\big|y_1 - y_2\big|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Étant donnée une condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Étant donné un entier $N \geq 1$, nous considérons la méthode numérique définie via le schéma

$$\forall 0 \leq n \leq N-1,\, y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} f\big(t_n, y_n\big) + \frac{2h}{3} f\Big(t_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4} f\big(t_n, y_n\big)\Big),$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\, t_n = n\, h.$$

1. Vérifier que cette méthode est une méthode à un pas de type explicite.

2.a. Cette méthode est-elle consistante ?

b. Donner une condition sur le pas h pour que cette méthode soit stable.

c. Cette méthode est-elle convergente sous cette condition sur le pas h ?

3. Quel est l'ordre de cette méthode ?