# Corrigé de l'examen

**Questions de cours.**

1. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ possède un point fixe superattractif en un point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad f'(a) = 0.$$

2. Le théorème de Weierstrass sur l'approximation polynomiale s'énonce ainsi :

*Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions polynômes sur $[a,b]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$. Autrement dit, quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\big\|f - P_n\big\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x) - P_n(x)\big| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

3. La méthode de quadrature élémentaire des trapèzes est définie par la formule

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}),\ \sigma(f) = f(0) + f(1).$$

4. Une méthode numérique à un pas pour la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0, t_0+T],\ y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

est définie par la donnée d'une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^0([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et la formule de récurrence pour les valeurs approchées $(y_n)_{0\le n\le N}$ aux temps $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ :

$$\forall 0 \le n \le N-1,\ y_{n+1} = y_n + h_n\, \Phi(t_n, y_n, h_n),$$

où $\forall 0 \le n \le N-1$, $h_n = t_{n+1} - t_n$.

**Exercice 1.**

1. La fonction $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \frac{1}{x}.$$

La suite $(x_n)_{n\ge 0}$ est donc donnée par la formule de récurrence

$$\forall n \ge 0,\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - x_n\big(\ln(x_n) - 1\big),$$

c'est-à-dire

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

pour la fonction $f$ définie par

$$\forall x > 0,\ f(x) = x\big(2 - \ln(x)\big).$$

2.a. La fonction $f$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 2 - \ln(x) - \frac{x}{x} = 1 - \ln(x).$$

Sachant que la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que $\ln(e) = 1$, nous constatons que la dérivée $f'$ est strictement positive sur $]0,e[$, s'annule en $x = e$, et devient strictement négative sur $]e,+\infty[$. Par conséquent, la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0,e[$. Comme

$$f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \quad \text{et} \quad f(e) = e,$$

nous concluons que $f$ est bien définie de $]0,e[$ sur $]0,e[$.

b. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et satisfait

$$\forall n \geq 0,\ 0 < x_n < e.$$

Lorsque $0 < x_0 < e$, cette propriété est vraie au rang $n = 0$, et si elle est vraie jusqu'au rang $n$, la question 2.a assure que $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie et appartient à l'intervalle $]0,e[$. Par récurrence, nous concluons donc que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $]0,e[$.

3.a. Nous calculons

$$\forall x \in ]0,e[,\ f(x) - x = x\big(1 - \ln(x)\big).$$

Par croissance stricte de la fonction logarithme,

$$\forall x \in ]0,e[,\ \ln(x) < \ln(e) = 1,$$

de sorte que

$$x\big(1 - \ln(x)\big) > 0.$$

Ainsi concluons-nous que

$$\forall x \in ]0,e[,\ f(x) > x.$$

b. Lorsque $0 < x_0 < e$, la question 2.b assure que

$$\forall n \geq 0,\ 0 < x_n < e,$$

d'où d'après la question 3.a,

$$x_{n+1} = f(x_n) > x_n.$$

Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien croissante lorsque $0 < x_0 < e$.

4. Nous déduisons des questions 2.b et 3.b que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $e$ et croissante lorsque $0 < x_0 < e$. Cette suite est donc convergente de limite $\ell \in ]0,e]$. Par continuité de la fonction $f$, cette limite satisfait

$$\ell = f(\ell) = \ell\big(2 - \ln(\ell)\big).$$

Comme $\ell > 0$, cette équation se réduit à

$$\ln(\ell) = 1,$$

soit $\ell = e$. En conclusion, nous avons établi que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\to} e,$$

lorsque $0 < x_0 < e$, et la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ permet donc d'obtenir une valeur approchée du nombre d'Euler $e$.

**Exercice 2.**

1.a. Considérons les fonctions polynômes $X_k$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \sigma(X_1) = -\lambda_1 + \lambda_3, \quad \text{et} \quad \sigma(X_2) = \lambda_1 + \lambda_3.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature $\sigma$ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2, \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = \lambda_1, \\ 2\lambda_1 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Son unique solution est donc égale à

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{3}, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire $\sigma$ est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire $\sigma$ est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{1}{3}\big(g(-1) + 4g(0) + g(1)\big),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

b. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \frac{1}{3}\big(-1+1\big) = 0, \quad \text{et} \quad \sigma(X_4) = \frac{1}{3}\big(1+1\big) = \frac{2}{3}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5},$$

nous obtenons

$$\sigma(X_3) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx, \quad \text{et} \quad \sigma(X_4) \neq \int_{-1}^{1} x^4\,dx,$$

de sorte que l'ordre de cette méthode est égal à 3.

2.a. Nous commençons par vérifier que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ (-y)_+ = \begin{cases} -y \text{ si } -y \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme

$$y_- = \begin{cases} -y \text{ si } y \leq 0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

nous obtenons

$$(-y)_+ = y_-.$$

De façon similaire, nous calculons

$$y^3 + 2y_-^3 = \begin{cases} y^3 \text{ si } y \geq 0, \\ y^3 - 2y^3 = (-y)^3 \text{ sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$y^3 + 2y_-^3 = |y|^3.$$

b. Par définition, le noyau de Peano $K$ de la méthode $\sigma$ est égal à

$$\forall y \in [-1, 1],\ K(y) = \int_{-1}^{1} \big(z - y\big)_+^3\, dz - \frac{1}{3}\Big(\big(-1 - y\big)_+^3 + 4\big(-y\big)_+^3 + \big(1 - y\big)_+^3\Big).$$

Nous calculons d'abord

$$\int_{-1}^{1} \big(z - y\big)_+^3\, dy = \int_{y}^{1} \big(z - y\big)^3\, dz = \Big[\frac{(z - y)^4}{4}\Big]_y^1 = \frac{(1 - y)^4}{4}.$$

Nous vérifions de plus que

$$\forall -1 \leq y \leq 1,\ -1 - y \leq 0, \quad \text{et} \quad 1 - y \geq 0,$$

de sorte que

$$(-1 - y)_+ = 0, \quad \text{et} \quad (1 - y)_+ = 1 - y.$$

D'après la première identité de la question 2.a, nous arrivons ainsi à l'expression

$$\begin{aligned} K(y) =& \frac{1}{4}(1 - y)^4 - \frac{1}{3}\big(4y_-^3 + (1 - y)^3\big) \\ =& \frac{1}{4}\Big(1 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + y^4\Big) - \frac{1}{3}\Big(1 - 3y + 3y^2 - y^3 + 4y_-^3\Big) \\ =& -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}\big(y^3 + 2y_-^3\big) + \frac{1}{4}y^4. \end{aligned}$$

La seconde identité de la question 2.a permet donc d'obtenir

$$K(y) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{2}{3}|y|^3 + \frac{1}{4}|y|^4.$$

Sachant que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12}\big(1 - |y|\big)^3\big(1 + 3|y|\big) =& -\frac{1}{12}\big(1 - 3|y| + 3|y|^2 - |y|^3\big)\big(1 + 3|y|\big) \\ =& -\frac{1}{12}\Big(1 - 6|y|^2 + 8|y|^3 - 3|y|^4\Big), \end{aligned}$$

nous concluons que

$$K(y) = -\frac{1}{12}\big(1-|y|\big)^3\big(1+3|y|\big).$$

c. Nous constatons que

$$\forall y \in [-1,1],\, 0 \leq |y| \leq 1, \qquad \text{et} \qquad 0 \leq 1-|y| \leq 1,$$

ce qui conduit aux inégalités

$$0 \leq \big(1-|y|\big)^3 \leq 1, \qquad \text{et} \qquad 0 \leq 1+3|y| \leq 4,$$

puis à l'inégalité

$$\big|K(y)\big| = \frac{1}{12}\big(1-|y|\big)^3\big(1+3|y|\big) \leq \frac{1}{3}.$$

d. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^4([-1,1],\mathbb{R})$, rappelons que l'erreur $E(g)$ associée à la méthode de quadrature élémentaire $\sigma$ est donnée par l'expression

$$E(g) = \frac{1}{3!}\int_{-1}^{1} K(y)\, g^{(4)}(y)\, dy.$$

Nous pouvons donc borner cette erreur par

$$\big|E(g)\big| \leq \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} \big|K(y)\big|\, \big|g^{(4)}(y)\big|\, dy,$$

d'où l'estimation

$$\big|E(g)\big| \leq \frac{1}{18}\int_{-1}^{1} \big|g^{(4)}(y)\big|\, dy,$$

d'après la question 2.c.

**Exercice 3.**

1. Introduisons la fonction

$$\forall (t,y,h) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2,\, \Phi(t,y,h) = \alpha f\big(t,y\big) + \beta f\big(t+h, y+hf(t,y)\big).$$

La fonction $\Phi$ est bien définie et continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \leq n \leq N-1,\, y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suit le schéma numérique considéré. Cette méthode numérique est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R},\, \Phi(t,y,0) = \alpha f\big(t,y\big) + \beta f\big(t+0, y+0f(t,y)\big) = \big(\alpha+\beta\big) f(t,y).$$

La méthode numérique considérée est donc consistante si et seulement si

$$\alpha + \beta = 1.$$

b. Pour $t \in [0,T]$, $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}$ fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction $f$ que

$$\begin{aligned}\big|\Phi(t,y_2,h) - \Phi(t,y_1,h)\big| \leq & \alpha\big|f\big(t,y_2\big) - f\big(t,y_1\big)\big| \\ & + \beta\big|f\big(t+h, y_2+hf(t,y_2)\big) - f\big(t+h, y_1+hf(t,y_1)\big)\big| \\ \leq & C\Big(\alpha\big|y_2-y_1\big| + \beta\big|y_2+hf(t,y_2) - y_1 - hf(t,y_1)\big|\Big).\end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$\big|y_2 + hf(t,y_2) - y_1 - hf(t,y_1)\big| \le \big|y_2 - y_1\big| + |h|\big|f(t,y_2) - f(t,y_1)\big| \le \big(1 + C|h|\big)\big|y_2 - y_1\big|,$$

d'où l'inégalité

$$\big|\Phi(t,y_2,h) - \Phi(t,y_1,h)\big| \le C\big(\alpha + (1 + C|h|)\beta\big)\,\big|y_2 - y_1\big|.$$

Sous la condition $|h| \le 1$,[1] nous obtenons

$$\big|\Phi(t,y_2,h) - \Phi(t,y_1,h)\big| \le C\big(C + 2\big)\,\big|y_2 - y_1\big|,$$

puisque $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$. La fonction $\Phi$ est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit la stabilité de la méthode numérique considérée.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode numérique est consistante et stable sous les conditions $\alpha + \beta = 1$ et $|h| \le 1$. Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous ces conditions.

3. Sous la condition $\alpha + \beta = 1$, rappelons d'abord que

$$\Phi(t,y,0) = \big(\alpha + \beta\big)f(t,y) = f(t,y) = \frac{1}{1}f^{[0]}(t,y),$$

et toutes les méthodes numériques considérées sont donc au moindre d'ordre 1.

Lorsque la fonction $f$ est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, la fonction $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$, et elle satisfait

$$\partial_h\Phi(t,y,h) = \beta\Big(\partial_t f\big(t+h, y + hf(t,y)\big) + f(t,y)\,\partial_y f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\Big),$$

pour tout $(t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$. Rappelons alors que la fonction $f^{[1]}$ est donnée par la formule

$$f^{[1]}(t,y) = \partial_t f(t,y) + f(t,y)\,\partial_y f(t,y).$$

Nous obtenons donc

$$\partial_h\Phi(t,y,0) = \frac{1}{2}f^{[1]}(t,y),$$

pour une fonction $f$ arbitraire, si et seulement si

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

Lorsque $\alpha + \beta = 0$ et $\beta \neq 1/2$, les méthodes numériques sont donc d'ordre 1.

De même, si la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, la fonction $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$, et elle satisfait

$$\begin{aligned}\partial_{hh}\Phi(t,y,h) = \beta\Big(&\partial_{tt} f\big(t+h, y + hf(t,y)\big) + 2f(t,y)\,\partial_{ty} f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\\ &+ f(t,y)^2\,\partial_{yy} f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\Big),\end{aligned}$$

pour tout $(t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$. Rappelons alors que la fonction $f^{[2]}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}f^{[2]}(t,y) =& \partial_{tt} f(t,y) + 2f(t,y)\,\partial_{ty} f(t,y) + f(t,y)^2\,\partial_{yy} f(t,y)\\ &+ \partial_t f(t,y)\,\partial_y f(t,y) + f(t,y)\,\big(\partial_y f(t,y)\big)^2,\end{aligned}$$

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme $|h| < h_0$, où $h_0$ est un nombre réel strictement positif fixé.

de sorte que, pour $\beta = 1/2$,

$$\partial_{hh}\Phi(t,y,0) = \frac{1}{2}\Big(\partial_{tt} f\big(t,y\big) + 2 f(t,y)\,\partial_{ty} f\big(t,y\big) + f(t,y)^2\,\partial_{yy} f\big(t,y)\big)\Big) \neq \frac{1}{3} f^{[2]}(t,y),$$

pour une fonction $f$ arbitraire. Quand $\alpha + \beta = 0$ et $\beta = 1/2$, la méthode numérique considérée est donc d'ordre 2.