# Examen

*La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.*

**Questions de cours.** (4 points)

1. Donner la définition d'un point fixe superattractif.

2. Donner l'énoncé du théorème de Weierstrass sur l'approximation polynomiale.

3. Donner la formule de la méthode de quadrature élémentaire des trapèzes.

4. Donner la définition d'une méthode numérique à un pas pour la résolution approchée d'une équation différentielle ordinaire.

**Exercice 1.** (5 points)

Nous cherchons à déterminer une valeur approchée du nombre d'Euler $e$, qui est l'unique zéro de la fonction

$$\forall x > 0, F(x) = \ln(x) - 1.$$

Étant donné un nombre $x_0 > 0$, nous considérons la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par la méthode de Newton pour la fonction $F$.

1. Déterminer la fonction $f$ telle que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = f(x_n).$$

2.a. Vérifier que la fonction $f$ est bien définie de $]0, e[$ dans $]0, e[$.

b. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie lorsque $0 < x_0 < e$.

3.a. Vérifier que

$$\forall x \in ]0, e[,\ f(x) > x.$$

b. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante lorsque $0 < x_0 < e$.

4. Conclure que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $e$ lorsque $0 < x_0 < e$.

**Exercice 2.** (6 points)

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \lambda_1\, g(-1) + \lambda_2\, g(0) + \lambda_3\, g(1).$$

1.a. Déterminer la valeur des nombres $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

b. Quel est alors l'ordre $p$ de cette méthode ?

Dans toute la suite de cet exercice, nous fixons les nombres $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ afin que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire $\sigma$ soit maximal.

2.a. Soit
$$\forall y \in \mathbb{R},\, y_+ = \begin{cases} y \text{ si } y \geq 0, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \qquad \text{et} \quad y_- = \begin{cases} -y \text{ si } y \leq 0, \\ 0 \text{ sinon}. \end{cases}$$
Vérifier que
$$\forall y \in \mathbb{R},\, (-y)_+ = y_-, \qquad \text{et} \quad y^3 + 2y_-^3 = |y|^3.$$

b. Montrer que le noyau de Peano $K$ de la méthode $\sigma$ vaut
$$\forall y \in [-1, 1],\, K(y) = -\frac{1}{12}\big(1 - |y|\big)^3\big(1 + 3|y|\big).$$

c. Vérifier que
$$\forall y \in [-1, 1],\, \big|K(y)\big| \leq \frac{1}{3}.$$

d. En déduire que l'erreur $E(g)$ associée à la méthode de quadrature élémentaire $\sigma$ pour une fonction $g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ satisfait
$$\big|E(g)\big| \leq \frac{1}{18} \int_{-1}^{1} \big|g^{(p+1)}(y)\big|\, dy.$$

**Exercice 3.** (5 points)

Soit $T > 0$ et $C \geq 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq C\big|y_1 - y_2\big|.$$

Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy
$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Étant donnés un entier $N \geq 1$ et deux nombres $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$, nous introduisons la méthode numérique définie par le schéma
$$y_0 = y^0, \qquad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N - 1,\, \begin{cases} z_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h\big(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f(t_{n+1}, z_{n+1})\big), \end{cases}$$

dans lequel nous avons noté
$$h = \frac{T}{N}, \qquad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\, t_n = n\, h.$$

1. Vérifier que cette méthode est une méthode à un pas de type explicite.

2.a. Déterminer une condition sur les nombres $\alpha$ et $\beta$ pour que cette méthode soit consistante.

b. Donner une condition sur les nombres $\alpha$ et $\beta$ et sur le pas $h$ pour que cette méthode soit stable.

c. En déduire des conditions sur les nombres $\alpha$ et $\beta$ et sur le pas $h$ pour que cette méthode soit convergente.

3. Sous ces conditions, quel est l'ordre de cette méthode ?