Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. L'algorithme de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I est défini par la formule de récurrence

$$x_0 \in I, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\, x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

(lorsqu'elle fait sens).

2. Supposons qu'il existe des points $(x_0, y_0) \in I^2$ tels que $F(x_0) < 0 < F(y_0)$. La méthode de la dichotomie pour la recherche des zéros de la fonction F est alors définie par la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} x_{n+1} = x_n, \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, \quad \text{si} \quad F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) > 0, \\ x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n, \quad \text{si} \quad F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) < 0, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, \quad \text{si} \quad F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) = 0. \end{cases}$$

3. Le polynôme d'interpolation de Lagrange P_f de la fonction f aux points x_0, x_1, …, et x_N est donné par la formule de Newton

$$P_f(X) = \sum_{k=0}^{N} f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (X - x_j),$$

où la notation $f[x_0, \dots, x_k]$ désigne la différence divisée de la fonction f aux points x_0, x_1, …, et x_k.

4. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'énonce ainsi : “ Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$. Fixons deux nombres $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, et considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est globalement lipschitzienne en sa seconde variable. Il existe alors une unique solution globale $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I,\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \text{ ”} \end{cases}$$

Exercice 1.

1.a. Soit $0 \leq j \leq N$. Par définition des polynômes P et Q_j, nous avons

$$P(X) = (X - x_0) \dots (X - x_j) \dots (X - x_N) = (X - x_j) \prod_{i \neq j} (X - x_i) = (X - x_j)\, Q_j(X).$$

b. Rappelons que les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc appliquer la formule de dérivation d'un produit à l'identité de la question 1.a afin d'obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R},\, P'(x) = Q_j(x) + (x - x_j)\, Q_j'(x).$$

Pour $x = x_j$, nous concluons que

$$P'(x_j) = Q_j(x_j).$$

c. Par définition du polynôme Q_j, nous calculons

$$Q_j(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i).$$

Sachant que les nombres x_0, x_1, …, et x_N sont deux à deux distincts, cette expression est non nulle, ce qui assure par la question 1.b que

$$P'(x_j) \neq 0.$$

2.a. Rappelons que le polynôme d'interpolation de Lagrange L_f de f aux points x_0, x_1, … et x_N est défini par

$$L_f(X) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \prod_{i \neq j} \Big(\frac{X - x_i}{x_j - x_i} \Big).$$

Par définition du polynôme Q_j, nous vérifions que

$$\prod_{i \neq j} \Big(\frac{X - x_i}{x_j - x_i} \Big) = \frac{\prod\limits_{i \neq j} (X - x_i)}{\prod\limits_{i \neq j} (x_j - x_i)} = \frac{Q_j(X)}{Q_j(x_j)}.$$

Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, les questions 1.a et 1.b assurent que

$$Q_j(x) = \frac{P(x)}{(x - x_j)}, \quad \text{et} \quad Q_j(x_j) = P'(x_j),$$

de sorte que

$$\prod_{i \neq j} \Big(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \Big) = \frac{P(x)}{P'(x_j)\,(x - x_j)}.$$

Par définition des nombres α_j, nous aboutissons à

$$L_f(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \, \frac{\alpha_j \, P(x)}{x - x_j}.$$

b. Considérons la fonction g constante égale à 1. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 0, soit inférieur ou égal à N. Elle coïncide donc avec son polynôme de Lagrange L_g aux points x_0, x_1, …, et x_N. Autrement dit, elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ L_g(x) = g(x) = 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, nous déduisons de la formule de la question 2.a que

$$\sum_{j=0}^{N} g(x_j) \, \frac{\alpha_j \, P(x)}{x - x_j} = 1,$$

c'est-à-dire

$$P(x) \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j}{x - x_j} = 1.$$

c. Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, la formule de la question 2.a conduit aux identités

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j\, L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j}{x - x_j} \Big(\sum_{k=0}^{N} f(x_k)\, \frac{\alpha_k\, P(x)}{x - x_k} \Big) = \Big(P(x) \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j}{x - x_j} \Big) \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_k\, f(x_k)}{x - x_k} \Big),$$

de sorte que par la question 2.b,

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j\, L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_k\, f(x_k)}{x - x_k}.$$

Exercice 2.

1. Considérons les fonctions polynômes X_k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_0) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \sigma(X_1) = \lambda_1 \xi + \lambda_2, \quad \text{et} \quad \sigma(X_2) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\, dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature σ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 \xi + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 - \lambda_1, \\ \lambda_1 (1 - \xi) = 2, \\ \lambda_1 (1 - \xi^2) = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

puis, comme $\xi \neq 1$, à

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 - \lambda_1, \\ \lambda_1 (1 - \xi) = 2, \\ 1 + \xi = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Son unique solution est donc égale à

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \xi = -\frac{1}{3}.$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{3}{2}\, g\Big(-\frac{1}{3} \Big) + \frac{1}{2}\, g(1),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

2.a. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

il existe un polynôme de degré égal à 3 pour lequel la méthode de quadrature élémentaire σ n'est pas exacte. Cette méthode est donc d'ordre égal à 2.

b. Pour $y \in [-1,1]$, posons

$$\forall x \in [-1,1],\ g_y(x) = \big(x-y\big)_+^2.$$

Par définition, le noyau de Peano K_2 de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1,1],\ K_2(y) = \int_{-1}^{1} g_y(x)\,dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} g_y(x)\,dx = \int_{y}^{1} \big(x-y\big)^2\,dx = \Big[\frac{(x-y)^3}{3}\Big]_y^1 = \frac{(1-y)^3}{3},$$

et que

$$\sigma(g_y) = \frac{3}{2}\,g_y\Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\,g_y(1) = \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{3}-y\Big)_+^2 + \frac{1}{2}\,(1-y)_+^2,$$

nous obtenons

$$K_2(y) = \frac{(1-y)^3}{3} - \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{3}-y\Big)_+^2 - \frac{1}{2}\,\big(1-y\big)^2 = -\frac{1}{6}(1-y)^2(1+2y) - \frac{1}{2}\Big(1+3y\Big)_-^2.$$

3.a. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, la méthode de quadrature composée Σ est donnée par la formule

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\Big(\frac{3}{2}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i+1}-x_i}{6}\Big) + \frac{1}{2}f(x_{i+1})\Big),$$

soit

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{4}\,\Big(3f\Big(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}\Big) + f(x_{i+1})\Big).$$

b. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons l'erreur

$$E(g) = \int_{-1}^{1} g(y)\,dy - \sigma(g),$$

associée à la méthode de quadrature élémentaire σ. Lorsque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1,1]$, rappelons que cette erreur s'exprime en fonction du noyau de Peano K_2 sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K_2(y)\,g'''(y)\,dy.$$

Nous allons appliquer cette formule pour exprimer l'erreur $\mathcal{E}(f)$ associée à la méthode de quadrature composée Σ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^3([a,b],\mathbb{R})$.

Introduisons les fonctions

$$\forall y \in [-1,1],\ f_i(y) = f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big),$$

pour $0 \leq i \leq M-1$. Comme le changement de variables

$$x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2},$$

réalise une bijection affine entre les segments $[-1,1]$ et $[x_i, x_{i+1}]$, les fonctions f_i sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1,1]$. Par définition de la méthode de quadrature composée Σ, elles satisfont de plus

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\,\sigma(f_i),$$

de sorte que par définition de l'erreur $\mathcal{E}(f)$,

$$\mathcal{E}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\,\sigma(f_i).$$

Par la formule de Chasles, et les changements de variables précédents, nous obtenons

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \Big(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\,\sigma(f_i)\Big) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big(\int_{-1}^{1} f_i(y)\,dy - \sigma(f_i)\Big).$$

Nous aboutissons à

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} E(f_i),$$

d'où la formule

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{4} \int_{-1}^{1} K_2(y)\, f_i'''(y)\,dy$$

Comme

$$f_i'''(y) = \Big(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big)^3 f'''\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big),$$

nous concluons que

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{32} \int_{-1}^{1} K_2(y)\, f'''\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big)\,dy,$$

soit

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{16} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K_2\Big(\frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}\Big)\, f'''(x)\,dx,$$

par le changement de variables

$$y = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}.$$

Exercice 3.

1. Introduisons la fonction

$$\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2,\ \Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\Big(f(t,y) + f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\Big).$$

La fonction Φ est bien définie et continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \leq n \leq N-1,\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suit le schéma numérique de Heun aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. La méthode de Heun est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R},\ \Phi(t,y,0) = \frac{1}{2}\Big(f(t,y) + f\big(t+0, y + 0f(t,y)\big)\Big) = f(t,y),$$

ce qui assure la consistance de la méthode de Heun.

b. Pour $t \in [0,T]$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}$ fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction f que

$$\begin{aligned}\big|\Phi(t,y_2,h) - \Phi(t,y_1,h)\big| \leq & \frac{1}{2}\Big(\big|f(t,y_2) - f(t,y_1)\big| \\ & + \big|f\big(t+h, y_2 + hf(t,y_2)\big) - f\big(t+h, y_1 + hf(t,y_1)\big)\big|\Big) \\ \leq & \frac{K}{2}\Big(\big|y_2 - y_1\big| + \big|y_2 + hf(t,y_2) - y_1 - hf(t,y_1)\big|\Big).\end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$\big|y_2 + hf(t,y_2) - y_1 - hf(t,y_1)\big| \leq \big|y_2 - y_1\big| + |h|\big|f(t,y_2) - f(t,y_1)\big| \leq \big(1 + K|h|\big)\big|y_2 - y_1\big|,$$

d'où l'inégalité

$$\big|\Phi(t,y_2,h) - \Phi(t,y_1,h)\big| \leq \frac{K}{2}\big(2 + K|h|\big)\big|y_2 - y_1\big|.$$

Sous la condition $|h| \leq 1$,[1] la fonction Φ est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit que la méthode de Heun est stable.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode de Heun est consistante et stable sous la condition $|h| \leq 1$. Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous cette condition.

3. Lorsque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, la fonction Φ définie à la question 1. est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$. De plus, elle satisfait

$$\partial_h \Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\Big(\partial_t f\big(t+h, y + hf(t,y)\big) + f(t,y)\, \partial_y f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\Big),$$

et

$$\begin{aligned}\partial_h^2 \Phi(t,y,h) = & \frac{1}{2}\Big(\partial_t^2 f\big(t+h, y + hf(t,y)\big) + 2f(t,y)\, \partial_t \partial_y f\big(t+h, y + hf(t,y)\big) \\ & + f(t,y)^2\, \partial_y^2 f\big(t+h, y + hf(t,y)\big)\Big),\end{aligned}$$

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme $|h| < h_0$, où h_0 est un nombre réel strictement positif fixé.

pour tout $(t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$. Rappelons alors que les fonctions $f^{[0]}$, $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont données par les formules

$$f^{[0]}(t,y) = f(t,y), \quad f^{[1]}(t,y) = \partial_t f(t,y) + f(t,y)\,\partial_y f(t,y),$$

et

$$f^{[2]}(t,y) = \partial_t^2 f(t,y) + \partial_t f(t,y)\,\partial_y f\big(t,y\big) + f(t,y)\big(2\partial_t\partial_y f\big(t,y\big) + \partial_y f(t,y)^2 + f(t,y)\,\partial_y^2 f(t,y)\big).$$

Nous obtenons donc

$$\Phi(t,y,0) = \frac{1}{1} f^{[0]}(t,y), \qquad \text{et} \qquad \partial_h \Phi(t,y,0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t,y),$$

tandis que, pour une fonction f générale,

$$\partial_h^2 \Phi(t,y,0) \neq \frac{1}{3} f^{[2]}(t,y).$$

En général, la méthode de Heun est donc d'ordre égal à 2.