Examen

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Donner la définition de la méthode de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

2. Donner la définition de la méthode de la dichotomie pour la recherche des zéros d'une fonction F continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

3. Considérons des nombres réels x_0, x_1, ..., et x_N deux à deux distincts, et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire la formule de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange P_f de la fonction f aux points x_0, x_1, ..., et x_N en fonction des différences divisées de cette fonction en ces points.

4. Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Exercice 1. (6 points)

Considérons des nombres réels x_0, x_1, ..., et x_N deux à deux distincts, et posons

$$P(X) = \prod_{i=0}^{N}(X - x_i), \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq j \leq N,\, Q_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N}(X - x_i).$$

1.a. Vérifier que

$$\forall 0 \leq j \leq N,\, P(X) = (X - x_j)\, Q_j(X).$$

b. En déduire que

$$\forall 0 \leq j \leq N,\, P'(x_j) = Q_j(x_j).$$

c. Conclure que

$$\forall 0 \leq j \leq N,\, P'(x_j) \neq 0.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Posons

$$\forall 0 \leq j \leq N,\, \alpha_j = \frac{1}{P'(x_j)}.$$

a. Vérifier que le polynôme d'interpolation de Lagrange L_f de f aux points x_0, x_1, ... et x_N satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\},\, L_f(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, \frac{\alpha_j\, P(x)}{x - x_j}.$$

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\},\, P(x) \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j}{x - x_j} = 1.$$

c. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}, \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j\, L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\alpha_j\, f(x_j)}{x - x_j}.$$

Exercice 2. (5 points)
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, et $-1 \leq \xi < 1$. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \lambda_1 g(\xi) + \lambda_2 g(1).$$

1. Déterminer la valeur des nombres λ_1, λ_2 et ξ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

Dans toute la suite de cet exercice, nous fixons les nombres λ_1, λ_2 et ξ afin que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ soit maximal.

2.a. Quel est alors l'ordre p de cette méthode ?

b. En déduire le noyau de Peano K_p de cette méthode.

3. Considérons une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$ d'un segment $[a, b]$ (non réduit à un point).

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée Σ associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$.

b. Écrire la formule de l'erreur $\mathcal{E}(f)$ associée à la méthode de quadrature composée Σ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b], \mathbb{R})$ en fonction du noyau de Peano K_p.

Exercice 3. (5 points)
Soit $T > 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq K\big|y_1 - y_2\big|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

par la méthode de Heun. Pour un entier $N \geq 1$, cette méthode est définie par le schéma numérique

$$y_0 = y^0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, \begin{cases} z_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})\Big), \end{cases}$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\, t_n = n\, h.$$

1. Vérifier que la méthode de Heun est une méthode à un pas de type explicite.

2.a. Vérifier que cette méthode est consistante.

b. Donner une condition sur le pas h pour que la méthode de Heun soit stable.

c. En déduire que cette méthode est convergente sous cette condition sur le pas h.

3. Quel est l'ordre de la méthode de Heun ?