L3M, Analyse complexe.

Examen du 18 décembre 2025, **3h.**.

Deux feuilles recto verso A4 manuscrites et nominatives sont autorisées. L'utilisation d'autres documents est interdite.

L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Le barème de points est indicatif. La note sera le nombre de points divisé par deux.

Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée, sauf mention explicite contraire.

Notations et rappels : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. La détermination principale du logarithme (ou logarithme principal) est notée Log, le logarithme néperien par ln. La fonction argument principal est notée Arg.
Pour tout $(z_0; z_1) \in \mathbb{C}^2$, soit $\psi_{z_0;z_1} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin C^1 défini par, pour $t \in [0;1]$, $\psi_{z_0;z_1}(t) = tz_1 + (1-t)z_0$.
Lorsque, pour $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$, $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, on note par Ind_γ la fonction d'indice par rapport à γ du cours.
On rappelle qu'un ouvert connexe par arcs est connexe par lignes polygonales et qu'une ligne polygonale est la concaténation de chemins rectilignes du type $\psi_{z_0;z_1}$.
On pourra utiliser, **sans justification**, les faits suivants :
A1 : Une fonction continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante.
A2 : Les fonctions polynômes et les quotients de fonctions polynômes sont holomorphes sur leur domaine de définition.

On ne justifiera pas les calculs d'indice d'un point par rapport à un chemin, le caractère ouvert d'un ensemble, le caractère étoilé d'un ouvert ni le caractère connexe par arcs d'un ouvert.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : 4 pts.
Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f_c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_c(x;y) \;=\; e^{cx}\left(\cos(y) \,+\, i\,\sin(y)\right).$$

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $P_c := \mathrm{Re}\, f_c$ et $Q_c := \mathrm{Im}\, f_c$ sont de classe C^1. Donner une expression de leurs dérivées partielles premières.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que f_c est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $c = 1$.

Exercice 2. : 11 pts.
On considère les séries entières

$$s \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (3\,+\,2i)^n\, z^n \quad \text{et} \quad t \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{i^n}{4^n}\, z^{2n}$$

de rayons de convergence respectifs R_s et R_t et de sommes respectives f_s et f_t.

1. Montrer que $R_s = 1/\sqrt{13}$ et que $R_t = 2$.
2. Soit $z_s = (3-2i)/(13)$. Montrer que f_s admet comme prolongement analytique la fonction $F_s : \mathbb{C}\setminus\{z_s\} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \neq z_s$,
$$F_s(z) \;=\; \frac{-z_s}{z\,-\,z_s}\,.$$
3. Soit $z_t = 2\exp(-i\pi/4)$. Montrer que f_t admet comme prolongement analytique la fonction $F_t : \mathbb{C}\setminus\{-z_t; z_t\} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \notin \{-z_t; z_t\}$,
$$F_t(z) \;=\; \frac{4i}{(z\,-\,z_t)\,(z\,+\,z_t)}\,.$$
4. Soit $\gamma : [-\pi/2; 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin C^1 donné par $\gamma(t) = e^{it}$. Soit Γ la concaténation de $\psi_{0;1}\mathring{+}(\gamma)_{\text{opp}}\mathring{+}\psi_{-i;0}$. C'est un chemin fermé dont l'image $\mathcal{I}_\Gamma$ est incluse dans $\mathbb{C}\setminus\{z_s; -z_t; z_t\}$. Calculer les intégrales
$$J_s \;:=\; \int_\Gamma F_s(w)\,\mathrm{d}w \quad \text{et} \quad J_t \;:=\; \int_\Gamma F_t(w)\,\mathrm{d}w\,.$$
(Indication : on pourra utiliser la fonction Ind_Γ ou le théorème des résidus.)

Exercice 3. : 16 pts.
Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on considère la fonction $g_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$g_a(z) \;=\; a\,-\,e^{-iz}\,.$$

Pour $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on considère l'intégrale

$$I(a) \;:=\; \int_0^\pi \frac{t\,\sin(t)}{1\,+\,a^2\,-\,2a\,\cos(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les chemins C^1 $\gamma_n : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_n^+ : [0;n] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\Gamma_n^- : [0;n] \longrightarrow \mathbb{C}$, donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \text{pour } t \in [-\pi;\pi]\,,\quad \gamma_n(t) \;&=\; t\,+\,in\,,\\ \text{pour } t \in [0;n]\,,\quad \Gamma_n^+(t) \;&=\; \pi\,+\,it\,,\\ \text{pour } t \in [0;n]\,,\quad \Gamma_n^-(t) \;&=\; -\pi\,+\,it\,,\end{aligned}$$

ainsi que le chemin fermé Γ_n obtenu par la concaténation

$$\Gamma_n \;:=\; \gamma_0 \,\mathring{+}\, \Gamma_n^+ \,\mathring{+}\, \big(\gamma_n\big)_{\text{opp}} \,\mathring{+}\, \big(\Gamma_n^-\big)_{\text{opp}}\,.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

   a). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$1 + a^2 - 2a\cos(t) = \left|a - e^{-it}\right|^2 .$$

   b). En déduire que, pour $|a| \neq 1$, $I(a)$ est l'intégrale d'une fonction continue.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

   a). Montrer que g_a est holomorphe. Donner une expression explicite de g'_a.

   b). Montrer que l'ensemble $Z(g_a)$ des zéros de g_a est donné par
$$Z(g_a) = \left\{2k\pi + i\ln(a)\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} .$$

   c). Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $g'_a(2k\pi + i\ln(a)) = ia \neq 0$.

3. Montrer que, pour $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$,
$$\int_{\gamma_0} \frac{z}{g_a(z)}\,\mathrm{d}z = -2i\,I(a) .$$
(Indication : on pourra utiliser la parité ou l'imparité de certaines fonctions.)

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \ln(a)$. Montrer que
$$\forall t \in [-\pi;\pi]\,,\quad 0 < e^n - a \leq \left|a - e^n e^{-it}\right| .$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \frac{z}{g_a(z)}\,\mathrm{d}z = 0 .$$

6. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n^+} \frac{z}{g_a(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{(\Gamma_n^-)_{\mathrm{opp}}} \frac{z}{g_a(z)}\,\mathrm{d}z &= 2i\pi \int_0^n \frac{dt}{a + e^t} \\ &= \frac{2i\pi}{a}\Big(\ln\big(1 + a\big) - \ln\big(1 + ae^{-n}\big)\Big) .\end{aligned}$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \ln(a)$. Montrer que
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n} \frac{z}{g_a(z)}\,\mathrm{d}z &= 2i\pi\,\frac{\ln(a)}{a}\,,\quad \text{si } 1 < a\,, \\ &= 0\,,\quad \text{si } 0 < a < 1 .\end{aligned}$$
(Indication : on pourra utiliser le théorème des résidus.)

8. En déduire que

$$
\begin{aligned}
I(a) \; &= \; \frac{\pi}{a} \, \ln\Big(1 \, + \, \frac{1}{a}\Big) \, , \quad \text{si } 1 \, < \, a \, , \\
&= \; \frac{\pi}{a} \, \ln\big(1 \, + \, a\big) \, , \quad \text{si } 0 \, < \, a \, < \, 1 \, .
\end{aligned}
$$

Exercice 4. : 16 pts.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue et injective telle que $\varphi(0) = 0$ et

$$
\forall \, R > 0 \, , \exists \, T > 0 \, ; \quad s \geq T \implies \varphi(s) \notin D(0; R] \, . \tag{1}
$$

Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{R}^+)$. On **admet** que Ω est un ouvert connexe par arcs (i.e. un domaine). On fixe un point $u_0 \in \Omega$.

1. Montrer qu'il existe $c_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(c_0) = u_0$.
2. Soit $z \in \Omega$. Soit $\gamma_1 : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ des lignes polygonales telles que $\gamma_1(0) = u_0 = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = z = \gamma_2(1)$. On considère le chemin fermé $\Gamma = \gamma_1 \mathring{+} (\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$.
   a). Montrer que la fonction $\mathrm{Ind}_\Gamma \circ \varphi$ est constante.
   b). En déduire que cette fonction est nulle.
   c). Montrer que
   $$
   \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} \; = \; \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} \, .
   $$
3. D'après le 2, l'application $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \Omega$,
   $$
   L(z) \; = \; \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}w}{w} \, ,
   $$
   où $\gamma_z : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ est une ligne polygonale vérifiant $\gamma_z(0) = u_0$ et $\gamma_z(1) = z$, est bien définie.
   a). Soit $z_0 \in \Omega$. Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $D(z_0; r_0] \subset \Omega$ et, pour tout $w \in D(z_0; r_0[$, $|w| \geq |z_0| - r_0 > 0$.
   b). Soit $\gamma_{z_0} : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ une ligne polygonale telle que $\gamma_{z_0}(0) = u_0$ et $\gamma_{z_0}(1) = z_0$. Pour tout $z \in D(z_0; r_0[$, montrer que la concaténation $\gamma_{z_0} \mathring{+} \psi_{z_0;z}$ est une ligne polygonale partant de u_0 et finissant en z en restant dans Ω.
   c). En déduire que, pour $z \in D(z_0; r_0[$, on a
   $$
   L(z) \, - \, L(z_0) \, - \, \frac{z \, - \, z_0}{z_0} \; = \; \int_{\psi_{z_0;z}} \left(\frac{1}{w} \, - \, \frac{1}{z_0} \right) \mathrm{d}w \, . \tag{2}
   $$
   d). Montrer que L est holomorphe en z_0 et que $L'(z_0) = 1/z_0$.
   e). Montrer que $L + c_0$ est une détermination du logarithme sur Ω.

Fin de l'épreuve.