

L3M, Analyse complexe.
Examen du 23 juin 2025, **1h30**.

Une feuille recto verso A4 manuscrite et nominative est autorisée. L'utilisation d'autres documents est interdite.

L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée, sauf mention explicite contraire.**

On **n'aura pas à justifier** qu'un ouvert connexe par arcs l'est bien.

On **n'aura pas à justifier** qu'un ouvert étoilé l'est bien.

On **n'aura pas à justifier** les calculs d'indice d'un point par rapport à un chemin.

Notations et rappels : On désigne par $\operatorname{Re}(z)$ (resp. $\operatorname{Im}(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z . On notera

$$\mathbb{R}^+ := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$$

et $\mathbb{R}^- := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}.$

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : 7 pts.

On considère la série entière

$$s := i \frac{\pi}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n} (z - i)^n.$$

Soit R son rayon de convergence et f sa somme.

1. Montrer que $R = 1$.
2. Montrer que f est holomorphe sur $D(i; 1[$ et que, pour tout $z \in D(i; 1[$, $f'(z) = 1/z$.
3. Montrer que la détermination principale du logarithme Log est un prolongement analytique de f à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
4. Montrer que la détermination du logarithme Log_0 est un prolongement analytique de f à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
5. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im}(z) < 0$, $\operatorname{Log}(z)$ et $\operatorname{Log}_0(z)$ sont bien définis et différents.

Exercice 2. : 7 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x)$ est bien définie et $f(-x) = f(x)$. Que vaut $f(0)$?
2. Soit $x > 0$ fixé. Pour $R > 1$, soit Γ_R le chemin fermé donné par la concaténation des chemins C^1 $\psi_{-R;R} : [0; 1] \ni t \mapsto tR - (1-t)R$ et de $\gamma_{0;R} : [0; \pi] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta}$.

a). Montrer que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{ixw}}{1+w^2} dw = \pi e^{-x}. \quad (1)$$

(Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy à une fonction appropriée.)

b). Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0;R}} \frac{e^{ixw}}{1+w^2} dw = 0. \quad (2)$$

c). En déduire une expression explicite de $f(x)$.

Exercice 3. : 9 pts.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On note par $\mathcal{S}(a; \Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $z \in \Omega$, $f'(z) = a(z)f(z)$.

1. Vérifier que $\mathcal{S}(a; \Omega)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω .
2. On suppose que la fonction a admet une primitive holomorphe A sur Ω .
 - a). Vérifier que la composée $\exp \circ A : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée, pour $z \in \Omega$, par $(\exp \circ A)(z) = \exp(A(z))$, appartient à $\mathcal{S}(a; \Omega)$.
 - b). Soit $f \in \mathcal{S}(a; \Omega)$. Montrer que la fonction $g : \Omega \ni z \mapsto f(z) \exp(-A(z))$ est holomorphe et a une $\mathbb{C}$ -dérivée nulle sur Ω .
 - c). On suppose de plus que Ω est connexe par arcs. Montrer que $\mathcal{S}(a; \Omega)$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 dont $\exp \circ A$ est une base.
3. Dans cette question, on choisit $a : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $a(z) = -1/z^2$. Déterminer explicitement $\mathcal{S}(a; \mathbb{C}^*)$. (Indication : chercher une primitive de a .)
4. Peut-on appliquer le résultat du 2. c) dans le cas où $a : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $a(z) = z^2 \operatorname{Log}(z)$? Justifier toute réponse.
5. Dans cette question, on choisit $a : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $a(z) = 1/z$. Montrer que $\mathcal{S}(a; \mathbb{C}^*)$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 dont la fonction $\operatorname{Id} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $\operatorname{Id}(z) = z$, est une base.
(Indication : on pourra d'abord déterminer $\mathcal{S}(a; \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$).

Fin de l'épreuve.