L3M, Analyse complexe.

Examen du 16 décembre 2024, **3h.**.

Une feuille recto verso A4 manuscrite et nominative est autorisée. L'utilisation d'autres documents est interdite.

L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 20, le barème sur 40 est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée, sauf mention explicite contraire.**

Notations et rappels : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. La détermination principale du logarithme (ou logarithme principal) est notée Log. Elle est définie sur

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \;=\; \big\{z \in \mathbb{C};\; (\mathrm{Im}\,(z) \neq 0) \text{ ou } (\mathrm{Im}\,(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > 0)\big\}\,.$$

La fonction argument principal est notée Arg. On rappelle qu'elle est définie sur $\mathbb{C}^*$ et à valeurs dans $]-\pi;\pi]$.
Les fonctions cosinus et sinus sont notées cos et sin respectivement. On rappelle que $\sin(2\pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et, en posant $j := \exp(2i\pi/3)$, $j^2 = \overline{j}$.
On note par $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On ne justifiera pas les calculs d'indice d'un point par rapport à un chemin.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : 6 pts.
On considère la série entière

$$s \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n}{3^n}\, z^n$$

et on note par R son rayon de convergence et par f sa somme.

1. Montrer que $R = 3$.
2. Montrer que f admet un prolongement analytique g défini sur $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $\exp(z) = 3i$.
4. Montrer que l'application $g \circ \exp$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$.

Exercice 2. : 14 pts.

Soit $\Omega_+ := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y>0\}$, $\Omega_- := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y<0\}$ et $C := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in [0;1]\,, y \in [0;1]\}$. On note que Ω_+ et Ω_- sont des ouverts et que C est un fermé. L'adhérence $\overline{\Omega}_+$ de Ω_+ est

$$\overline{\Omega}_+ \;=\; \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x\,+\,y\,\geq\,0\big\}\,.$$

Le bord ∂C de C est la réunion des segments $[0;1]$, $[0;i]$, $[1;1+i]$ et $[i;1+i]$ de $\mathbb{C}$ et l'intérieur $\mathring{C}$ de C est

$$\mathring{C} \;=\; \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in\,]0;1[\,,\, y \in\,]0;1[\big\}\,.$$

On considère les fonctions $P, Q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies, pour $(x;y) \in \overline{\Omega}_+$, par

$$P(x;y) \;=\; x^2\,-\,y^2 \quad \text{et} \quad Q(x;y) \;=\; 2(xy\,-\,1)\,, \tag{1}$$

et, pour $(x;y) \in \Omega_-$, par

$$P(x;y) \;=\; e^{-y}\big(x\cos(x)\,-\,y\sin(x)\big) \quad \text{et} \quad Q(x;y) \;=\; e^{-y}\big(y\cos(x)\,+\,x\sin(x)\big)\,. \tag{2}$$

Soit $f = P + iQ$. Soit f_+ la restriction de f à Ω_+ et f_- la restriction de f à Ω_-.

1. Montrer que f_+ est holomorphe sur Ω_+.
2. Montrer que f_- est holomorphe sur Ω_-.
3. Montrer que f_+ admet $f(0;0)$ pour limite en $(0;0)$.
4. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que la restriction g de f à C est continue.
6. Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$,
$$\big|g\big(t(1+i)\,+\,(1-t)i\big)\big|^2 \;=\; \big|g\big(t(1+i)\,+\,(1-t)\big)\big|^2 \;=\; (t^2-1)^2\,+\,4(1-t)^2\,.$$
7. Déterminer la borne supérieure $\sup_{\partial C}|g|$ de $|g|$ sur ∂C.
8. Déterminer la borne supérieure $\sup_C |f|$ de $|f|$ sur C et montrer qu'elle est atteinte en un point que l'on précisera.

Exercice 3. : 10 pts.

Soit $(P;Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$. Soit $f : \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = P(z)/Q(z)$. On considère l'ouvert non vide $\Omega := \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

1. Montrer que f est holomorphe sur Ω.
2. Montrer qu'il existe $r > 0$ et un ouvert étoilé $\tilde{\Omega}$ tel que $D(z_0;r] \subset \tilde{\Omega}$ et
$$\tilde{\Omega} \cap Q^{-1}(\{0\}) \;=\; \{z_0\}\,.$$

3. Soit $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \Omega$ définie par $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\,.$$

(Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy dans $\tilde{\Omega}$ à une fonction holomorphe appropriée).

4. Application : Soit $j = \exp(2i\pi/3)$, $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{1; j; \bar{j}\}$ et $g : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) \;=\; \frac{3z^2 \,-\, 2z \,+\, 7}{z^3 \,-\, 1}\,.$$

Soit $\gamma_1 : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_1(t) = 1 + \exp(it)$.
a). Vérifier qu'il existe un ouvert étoilé $\tilde{\Omega}_1$ tel que $D(1; 1] \subset \tilde{\Omega}_1$, $j \notin \tilde{\Omega}_1$ et $\bar{j} \notin \tilde{\Omega}_1$.
b). Calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(z)\,dz\,.$$

Exercice 4. : 12 pts.
On considère l'ouvert connexe par arcs $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \Omega$,

$$F(z) \;:=\; \int_0^{+\infty} e^{-t^2 z}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Soit $a > 0$ et $\Omega_a := \{z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) > a\}$. Montrer que

$$\forall\, z \in \Omega_a\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+\,, \quad \left|e^{-t^2 z}\right| \;\le\; e^{-t^2 a}\,.$$

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 a}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Montrer que F est bien définie et holomorphe.
3. Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $F'(z) = -F(z)/(2z)$.
4. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall\, z \in \Omega\,, \quad F(z) \;=\; c\,\exp\bigl(-\mathrm{Log}\,(z)/2\bigr)\,.$$

5. Vérifier que $c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $c = F(1)$.

Fin de l'épreuve.