L3M, Analyse complexe.

Examen, session 2, **2h.**.

Une feuille A4 manuscrite et nominative est autorisée. L'utilisation d'autres documents est interdite.
L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Examen noté sur 20, le barème est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée, sauf mention explicite contraire.**
Notations et rappels : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. On rappelle que l'exponentielle réelle satisfait la propriété

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} x^n \, \exp(-x) \; = \; 0\,. \tag{1}$$

La fonction argument principal est notée Arg. On rappelle qu'elle est définie sur $\mathbb{C}^*$ et à valeurs dans $]-\pi;\pi]$. Les fonctions cosinus et sinus sont notées cos et sin respectivement.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : 6 pts. Soit $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(x;y) \; = \; e^{|x|}\big(|x|\,\cos(y) \,-\, y\,\sin(y)\big) \quad \text{et} \quad Q(x;y) \; = \; e^{|x|}\big(|x|\,\sin(y) \,+\, y\,\cos(y)\big)\,.$$

Soit $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la bijection donnée par, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $J(z) = (\mathrm{Re}\,(z); \mathrm{Im}\,(z))$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application donnée par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\; f(z) \; = \; P\big(J(z)\big) \,+\, iQ\big(J(z)\big)\,.$$

On considère les ouverts de $\mathbb{C}$ suivants :

$$\Omega_1 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) > 0 \;\big\}\,, \quad \Omega_2 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}\,(z) > 0 \big\}$$
$$\text{et} \quad \Omega_3 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) < 0 \big\}\,.$$

Pour $k \in \{1;2;3\}$, on pose $\tilde{\Omega}_k = J(\Omega_k)$.

1. Montrer que f est holomorphe sur Ω_1.
   (Indication : on commencera par simplifier P et Q sur $\tilde{\Omega}_1$).
2. Montrer que P n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x au point $(0;\pi)$.
3. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω_2 ?
4. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω_3 ?

Exercice 2. : 4 pts. Soit $h : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = (1+z)^{-1} \exp(z)$. On considère l'ouvert

$$\Omega \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\ \mathrm{Re}\,(z) \in]0;1[\text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in]0;1[\big\} \,.$$

Montrer que la borne supérieure $\sup\limits_{z \in \overline{\Omega}} |h(z)|$ de $|h|$ sur l'adhérence

$$\overline{\Omega} \ = \ \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\ \mathrm{Re}\,(z) \in [0;1] \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in [0;1] \big\}$$

de Ω est atteinte. Déterminer sa valeur et donner un point de $\overline{\Omega}$ où elle est atteinte.
On **admet** que $2 < e = \exp(1)$.
(Indication : on pourra vérifier que, pour $x \in [0;1]$, $|h(x+i)| \leq |h(x)|$).

Exercice 3. : 13 pts.
Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie, pour $z \in \mathbb{C}^*$, par $f(z) = \exp(-1/z)$. Soit $\mathcal{E}$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du disque ouvert $D(0;1[$ de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire $\mathcal{E} := \mathbb{C} \setminus D(0;1[$.
Soit

$$\Omega \ = \ \left\{ z \in \mathbb{C}^* \,;\ \mathrm{Arg}(z) \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[\right\} \,.$$

Soit g la restriction de f à l'ouvert étoilé Ω.

1. Montrer que, pour $z \in \Omega$, on a
$$\frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} \ \in \ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right] \,. \tag{2}$$
2. Montrer que f est holomorphe. En particulier, g est aussi holomorphe.
3. Montrer que la borne supérieure $\sup\limits_{\mathcal{E}} |f|$ du module $|f|$ de f sur $\mathcal{E}$ est finie et atteinte en un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.
4. Soit $r > 0$ et $\gamma_r : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie, pour $t \in [0;2\pi]$, par $\gamma_r(t) = r\exp(it)$. Montrer que l'intégrale
$$I_r \ := \ \int_{\gamma_r} f(w)\, dw \,.$$
est non nulle.
5. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme Q_p de degré au plus $2p$ telle que la dérivée p-ième $g^{(p)}$ de g vérifie
$$\forall\, z \in \Omega \,, \quad g^{(p)}(z) \ = \ Q_p(1/z)\, g(z) \,. \tag{3}$$
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{z \to 0} g^{(p)}(z) = 0$.
7. Soit $r > 0$. Montrer que g n'admet pas de prolongement analytique sur l'ouvert étoilé $\Omega_r := D(0;r[\cup \Omega$.
8. La fonction f admet-elle un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$?

Fin de l'épreuve.