L3M, Analyse complexe.

Examen du 20 décembre 2023, **3h.**.

Une feuille A4 manuscrite et nominative est autorisée. L'utilisation d'autres documents est interdite.

L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 20, le barème sur 40 est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée, sauf mention explicite contraire.**

Notations et rappels : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. La détermination principale du logarithme (ou logarithme principal) est notée Log (resp. Arg). Elle est définie sur

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \;=\; \big\{ z \in \mathbb{C};\; (\mathrm{Im}\,(z) \neq 0) \text{ ou } (\mathrm{Im}\,(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > 0) \big\} .$$

On rappelle que le développement en série entière du logarithme principal en 1 est donné par, pour $w \in D(1;1)$,

$$\mathrm{Log}\,(w) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \, (w-1)^n . \tag{1}$$

La fonction argument principal est notée Arg. On rappelle qu'elle est définie sur $\mathbb{C}^*$ et à valeurs dans $]-\pi;\pi]$.
Les fonctions cosinus et sinus sont notées cos et sin respectivement.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : 5,5 pts.
Soit $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{sgn}(t) = -1$, si $t < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ et $\mathrm{sgn}(t) = 1$, si $t > 0$. Soit $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(x;y) \;=\; \mathrm{sgn}(x)\,(2 + x^2 - y^2) \quad \text{et} \quad Q(x;y) \;=\; 2xy\,\mathrm{sgn}(y-1) .$$

Soit $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la bijection donnée par, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $J(z) = (\mathrm{Re}\,(z); \mathrm{Im}\,(z))$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application donnée par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\; f(z) \;=\; P\big(J(z)\big) \,+\, iQ\big(J(z)\big) .$$

On considère les ouverts de $\mathbb{C}$ suivants :

$$\Omega_1 \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}\,(z) > 1 \big\}\,, \quad \Omega_2 \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}\,(z) > 1 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > 0 \big\}$$

et

$$\Omega_3 \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}\,(z) > 1 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) < 0 \big\} .$$

Pour $k \in \{1;2;3\}$, on pose $\tilde{\Omega}_k = J(\Omega_k)$.

1. Soit $y \in (\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\})$. Montrer que P n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x au point $(0; y)$.
2. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω_1 ?
3. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω_2 ?
4. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω_3 ?

Exercice 2. : 11 pts.
On considère les séries entières s et t de la variable complexe z données par

$$s \;:=\; \sum_{n \in [\![2;+\infty[\![} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, z^n \quad \text{et} \quad t \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\, 2^{n+1}\, z^{2n+1}$$

avec $[\![2;+\infty[\![:= [2;+\infty[\cap \mathbb{N}$.
D'après la formule (1) avec w remplacé par $1+z$, on voit que la fonction $L : D(0;1) \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $L(z) = \operatorname{Log}(1+z)$ est bien définie.

1. Montrer que le rayon de convergence R_s de s est 1.
2. Montrer que le rayon de convergence R_t de t est $1/\sqrt{2}$.
3. Déterminer la somme T de la série entière t sur $D(0; 1/\sqrt{2})$.
(Indication : on pourra utiliser la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^{2n}$).
4. Vérifier que la somme S de la série entière s est une primitive sur $D(0;1)$ de la fonction L.
5. Montrer que, pour $z \in D(0;1)$,
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, z^n \;=\; z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, z^k \;+\; \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\, z^p\,. \tag{2}$$
(Indication : on pourra utiliser, pour $n \geq 2$, $n^{-1}(n-1)^{-1} = (n-1)^{-1} - n^{-1}$).
6. En déduire une expression de la somme S de la série entière s sur $D(0;1)$, expression faisant intervenir la fonction L.

Exercice 3. : 12,5 pts.
Soit $(a;b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule

$$I \;:=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) \;+\; b^2\sin^2(t)} \;=\; \frac{2\pi}{ab}. \tag{3}$$

On considère le chemin $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1, défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$.

1. Vérifier que γ ne s'annule pas et montrer que, pour $t \in [0; 2\pi]$,

$$\gamma(t) \;=\; \frac{a+b}{2}\, e^{it} \;+\; \frac{a-b}{2}\, e^{-it}\,.$$

2. Montrer que, pour $t \in [0; 2\pi]$,

$$|\gamma(t)|^2 \;=\; a^2\cos^2(t) \;+\; b^2\sin^2(t) \;=\; \frac{a^2+b^2}{2} \;+\; \frac{a^2-b^2}{2}\,\cos(2t)\,.$$

3. Montrer que, pour $t \in [0; 2\pi]$,

$$\gamma'(t)\,\overline{\gamma(t)} \;=\; iab \;-\; \frac{a^2-b^2}{2}\,\sin(2t)\,.$$

4. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} \;=\; iab\, I\,.$$

5. On suppose que $a = \min(a; b)$. On considère le chemin, de classe C^1, $\mu : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\mu(t) = a\exp(it)$. On note par γ_1 (resp. μ_1) la restriction $\gamma_{|[0;\pi]}$ (resp. $\mu_{|[0;\pi]}$) de γ (resp. μ) à $[0; \pi]$. On note γ_2 (resp. μ_2) la restriction $\gamma_{|[\pi;2\pi]}$ (resp. $\mu_{|[\pi;2\pi]}$) de γ (resp. μ) à $[\pi; 2\pi]$.

   a). Montrer que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \;=\; \int_{\mu_1} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \;=\; \int_{\mu_2} \frac{dz}{z}\,.$$

   b). Calculer explicitement

$$\int_\mu \frac{dz}{z}\,.$$

   c). En déduire la valeur de I.

Remarque : si $a > b$, les arguments du 5 avec a et b échangés donne la même valeur de I.

Exercice 4. : 7 pts.
Soit $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = z\exp(-z)$. On considère l'ouvert

$$\Omega \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) \in]0;1[\text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in]0;1[\big\}\,.$$

Montrer que la borne supérieure

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |h(z)|$$

de $|h|$ sur l'adhérence

$$\overline{\Omega} \;=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) \in [0;1] \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in [0;1]\big\}$$

de Ω est atteinte. Déterminer sa valeur et donner un point de $\overline{\Omega}$ où elle est atteinte.
(Indication : on pourra utiliser le fait que $1 < \sqrt{2} < e = \exp(1)$).

Exercice 5. : 11 pts.
On **admet** le résultat suivant : Soit K et K' deux compacts de $\mathbb{C}$ tels que $K \cap K' = \emptyset$. Alors la borne inférieure

$$d(K;K') \ := \ \inf\big\{|z - z'|\,;\ z \in K\,,\ z' \in K'\big\} \ > \ 0\,.$$

est strictement positive.
Soit $r > 0$ et $\theta \in [0;\pi/2]$. Soit $z_0 = r\exp(i\theta)$. On rappelle que le segment $[0;z_0]$ est $\{tz_0\,;\ t \in [0;1]\}$. On rappelle que la fonction Arg_θ est définie sur l'ouvert $\Omega_\theta := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ et associe, à tout $z \in \Omega_\theta$, l'unique argument de z qui appartient à $]\theta;\theta+2\pi[$.
On considère les chemins $\gamma_0 : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [\theta-\pi;\theta] \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1, donné par $\gamma_0(t) = tz_0$ et $\gamma_1(t) = (z_0 + r\exp(it))/2$.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $F : (\mathbb{C} \setminus [0;z_0]) \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$F(z) \ := \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

On considère aussi les demi-disques ouverts

$$\Omega \ := \ D\big(z_0/2; r/2\big) \ \cap \ \big\{z \in \Omega_\theta\,;\ \mathrm{Arg}_\theta(z) \ \in]\theta;\theta+\pi[\big\}$$

et

$$\Omega' \ := \ D\big(z_0/2; r/2\big) \ \cap \ \big\{z \in \Omega_\theta\,;\ \mathrm{Arg}_\theta(z) \ \in]\theta+\pi;\theta+2\pi[\big\}\,.$$

On ne justifiera pas les éventuels calculs d'indice.

1. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{I}(\gamma) := \gamma([a;b])$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ inclu dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{I}(\gamma)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t \in [a;b]$, pour tout $z \in K$,

$$\frac{1}{|\gamma(t) - z|} \ \leq \ c\,. \tag{4}$$

2. Montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0;z_0]$.

3. Montrer que, pour $z \in \Omega$,

$$F(z) \ = \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

4. En déduire que la restriction $F_{|\Omega}$ de F à Ω admet un prolongement analytique G au disque $D(z_0/2;r/2)$.

5. Montrer que, pour tout $z \in \Omega'$, $G(z) - F(z) = f(z)$.

Fin de l'épreuve.