L3 Mathématiques
22 juin 2023

Analyse complexe : examen de session 2

Durée : 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Téléphones portables et objets connectés INTERDITS et ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Exercice 1 (7pts). On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Lorsqu'elle converge on note $f(z)$ sa somme.

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b) Montrer que pour tout $z \in D(0,R)$ on a $f(z) = -\mathrm{Log}(1-z)$ où Log désigne la détermination principale du logarithme. Indication : en justifiant soigneusement les étapes on pourra commencer par calculer $f'(z)$.

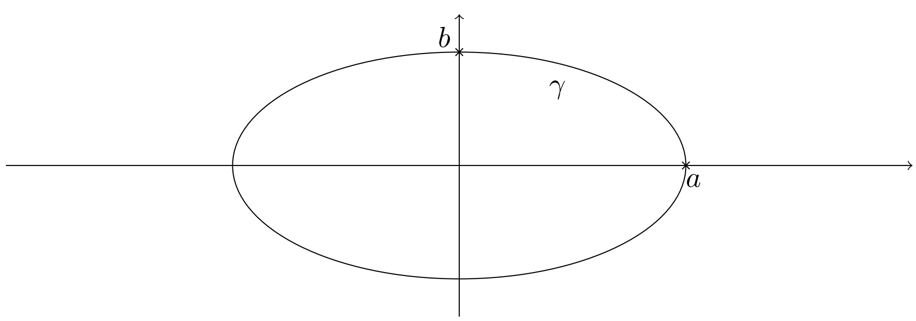
c) Montrer que f possède un unique prolongement analytique sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. On notera g ce prolongement.

d) Que vaut $g(i)$?

e) Justifier que g admet un DSE en i et préciser son rayon de convergence.

f) Déterminer le développement en série entière de g en i. On pourra commencer par déterminer celui de g'.

Exercice 2 (3pts). Soit $a, b > 0$. On considère le lacet γ défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. L'image de γ est l'ellipse représentée sur le dessin ci-dessous et parcourue une fois dans le sens trigonométrique.



a) Si z_0 n'est pas sur γ rappeler la définition de l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, \mathrm{z}_0)$. Que représente-t-il graphiquement ?

b) En calculant de deux façons différente l'intégrale $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ en déduire la valeur de l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

TSVP

Exercice 3 (10pts). Dans tout l'exercice on fixe $a, b > 0$ avec $a \neq b$. Le but est de montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

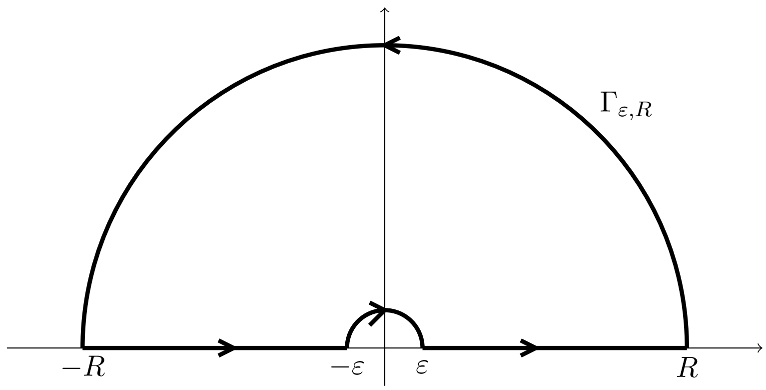
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On considère pour cela la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iaz} - \mathrm{e}^{ibz}}{z^2}$.

a) Justifier rapidement que f définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique singularité z_0 que l'on précisera.

b) Justifier que z_0 est un pôle simple de f et que $\mathrm{Res}(f, z_0) = i(a - b)$.

Etant donnés $\varepsilon, R > 0$ tels que $0 < \varepsilon < R$ on considère le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct.



On notera par la suite γ_1 le demi-cercle de rayon R, γ_2 le segment d'extrêmités $-R$ et $-\varepsilon$, γ_3 le demi-cercle de rayon ε, et γ_4 le segment d'extrêmités ε et R, tous parcourus dans le même sens que sur le dessin.

c) Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Vous justifierez soigneusement l'utilisation de tout théorème.

d) Donner un paramétrage de chacun des 4 chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4.

e) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_\varepsilon^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

f) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout point z sur γ_1 on a $|f(z)| \leq \dfrac{2}{R^2}$.

g) i) En utilisant le résultat de la question b) montrer qu'il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $z \neq 0$ on a $f(z) = \dfrac{i(a-b)}{z} + g(z)$.

ii) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Indication : on pourra d'abord justifier que g admet une primitive G (que l'on ne cherchera pas à expliciter) sur $\mathbb{C}$ et exprimer $\displaystyle\int_{\gamma_3} g(z)\,\mathrm{d}z$ à l'aide de G.

iii) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z$.

h) A l'aide de tout ce qui précède montrer que I converge et déterminer sa valeur.