L3 Mathématiques
15 décembre 2022

CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Analyse complexe : corrigé de l'examen de session 1

Exercice 1. *On note j le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.*

a) *Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.*

On a $j \neq 1$ car $\frac{2i\pi}{3} \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. On a donc (somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$ et de premier terme 1) $1 + j + j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j}$. Or $j^3 = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1$ donc finalement $1 + j + j^2 = 0$.

b) *Rappeler la définition de la fonction* Log*, détermination principale du logarithme, et calculer* $\mathrm{Log}(1+j)$ *et* $\mathrm{Log}(1+j^2)$.

La fonction Log est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\arg_{]-\pi,\pi[}(z)$ où $\arg_{]-\pi,\pi[}(z)$ est l'unique argument de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ dans $]-\pi,\pi[$.

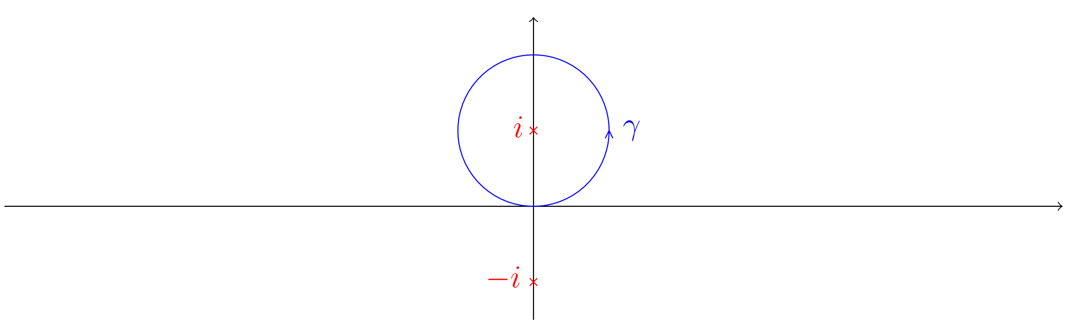
D'après la question a) on a $1 + j = -j^2 = -\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que $\mathrm{Log}(1+j) = i\frac{\pi}{3}$.

De même, d'après la question a), on a $1 + j^2 = -j = -\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que $\mathrm{Log}(1+j^2) = -i\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ par $f(z) = \dfrac{2z}{1+z^2}$.*

a) i) *On considère le chemin γ dont l'image est le cercle de centre i et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Justifier que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Indication : on pourra utiliser au choix la formule de Cauchy ou le théorème des résidus, mais on justifiera soigneusement leur utilisation.*

Méthode 1 : Les fonctions définies par $g(z) = 2z$ et $h(z) = 1 + z^2$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ (fonctions polynomiales) donc $f = \frac{g}{h}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. On a $h(z) = (z+i)(z-i)$ donc les singularités de f sont i et $-i$ (les zéros de h). Ce sont des racines simples de h et g ne s'annule ni en i ni en $-i$, donc i et $-i$ sont des pôles simples de f. Le chemin fermé γ est dans $\mathbb{C}$ et ne passe ni par i ni par $-i$. En effet $|i - i| = 0 \neq 1$ et $|-i-i| = 2 \neq 1$. L'intégrale est donc bien définie, et pour calculer sa valeur on peut appliquer le théorème des résidus (f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé et γ ne passe pas par les pôles de f).



Le point i est à l'intérieur de γ, et γ en fait une fois le tour dans le sens trigonométrique, tandis que $-i$ est à l'extérieur de γ. On en déduit que $\mathrm{Ind}(\gamma, i) = 1$ et $\mathrm{Ind}(\gamma, -i) = 0$. Finalement, puisque i est un zéro simple du dénominateur h, on a $\mathrm{Res}(f, i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = 1$ et donc d'après le théorème des résidus

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi\Big(\mathrm{Ind}(\gamma, i)\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Ind}(\gamma, -i)\mathrm{Res}(f, -i)\Big) = 2i\pi.$$

<u>Méthode 2</u> : Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ on a $f(z) = \dfrac{2z}{(z+i)(z-i)} = \dfrac{g(z)}{z-i}$ où $g(z) = \dfrac{2z}{z+i}$. La fonction g définit une fonction holomorphe sur l'ouvert étoilé $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}\right\}$. Le chemin fermé γ est dans Ω et ne passe pas par i. L'intégrale est donc bien définie et on peut appliquer la formule de Cauchy

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\gamma \frac{g(z)}{z+i}\,\mathrm{d}z \;=\; 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, i) \times g(i) \;=\; 2i\pi.$$

<u>Méthode 3</u> : Une décomposition en élément simple de f donne, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z-i} + \dfrac{1}{z+i}$. Les points i et $-i$ ne sont pas sur le chemin fermé γ donc, par définition de l'indice,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-i} + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+i} \;=\; 2i\pi \times \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma, i)}_{=1} + 2i\pi \times \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma, -i)}_{=0} \;=\; 2i\pi.$$

ii) *Montrer que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$.*

γ est un chemin fermé dans $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ sur lequel f est continue. Si f admettait une primitive on aurait $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Le résultat du i) permet donc d'affirmer que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$.

b) i) *On note* Log *la détermination principale du logarithme. Montrer que* $\mathrm{Log}(1+z^2)$ *est bien défini pour tout* $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy \,|\, y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$, *puis que la fonction* F *définie sur* Ω *par* $F(z) = \mathrm{Log}(1+z^2)$ *est une primitive de* f.

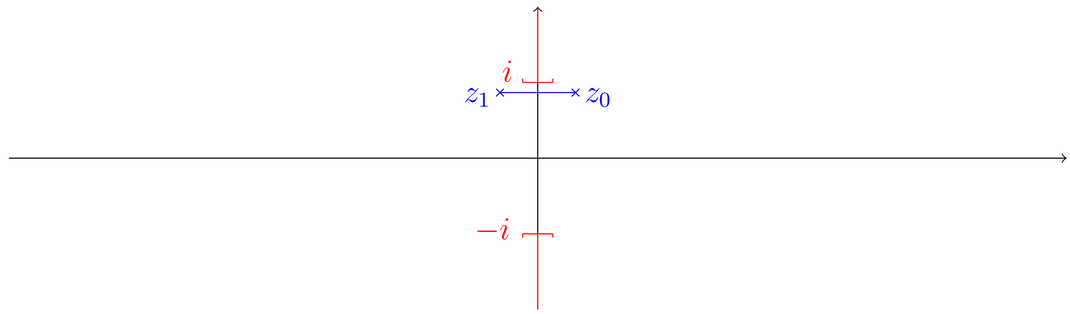
La fonction Log est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ donc $\mathrm{Log}(1+z^2)$ est bien défini pour tout z tel que $1+z^2 \notin \mathbb{R}_-$. Si $z = x+iy$ on a $1+z^2 = 1+x^2-y^2+2ixy$, donc $1+z^2 \in \mathbb{R}_-$ si et seulement si $xy = 0$ et $1+x^2-y^2 \leq 0$. On a donc soit $x = 0$ soit $y = 0$, mais si $y = 0$ alors $1+x^2-y^2 = 1+x^2 > 0$ donc $1+z^2 \notin \mathbb{R}_-$. Ainsi $1+z^2 \in \mathbb{R}_-$ si et seulement si $x = 0$ et $1-y^2 \leq 0$, i.e. $|y| \geq 1$. Conclusion : on a $1+z^2 \notin \mathbb{R}_-$ si et seulement si $z \in \Omega$ et F est bien définie sur cet ensemble.

La fonction F est alors holomorphe car composée de fonctions holomorphe (la fonction polynomiale h définie par $h(z) = 1+z^2$ et la fonction Log) et pour tout $z \in \Omega$ on a $F'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = f(z)$, i.e. F est une primitive de f sur Ω.

ii) *On considère le chemin $\tilde{\gamma}$ dont l'image est le segment $[z_0, z_1]$ avec $z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. <u>Indication</u> : on pourra être amené à utiliser le résultat de l'Exercice 1.*

On a $\mathrm{Im}(z_0) = \mathrm{Im}(z_1) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points du segment $[z_0, z_1]$ ont donc tous la même partie imaginaire égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1, 1[$ (la valeur exacte n'a pas d'importance tant que cette partie imaginaire est strictement entre -1 et 1). On peut aussi le voir en paramétrant $\tilde{\gamma}$: $\tilde{\gamma}(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = \frac{1}{2} - t + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 1]$ et on a bien $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On en déduit que $[z_0, z_1] \subset \Omega$ (aucun point du segment n'a une partie imaginaire y tel que $|y| \geq 1$) et que f est continue sur $[z_0, z_1]$.



Sur Ω la fonction F est une primitive de f et $[z_0, z_1] \subset \Omega$ donc

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0).$$

On a $F(z_1) = \mathrm{Log}\,(1 + z_1^2) = \mathrm{Log}\,(1 + j^2) = -i\frac{\pi}{3}$ d'après l'Exercice 1, et $F(z_0) = \mathrm{Log}\,(1 + z_0^2) = \mathrm{Log}\,(1 + j) = i\frac{\pi}{3}$ toujours d'après l'Exercice 1. Finalement on obtient $\displaystyle\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{2i\pi}{3}$.

c) i) *Donner le développement en série entière de f en 0. On précisera sur quel disque ce développement a lieu.*

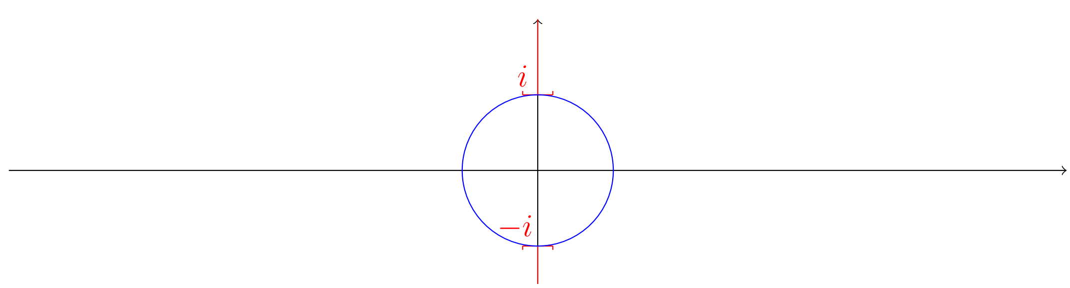
La fonction f est holomorphe donc analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, et $0 \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. On peut donc affirmer que f admet un DSE en 0 et le disque sur lequel ce DSE a lieu est le plus grand disque centré en 0 inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$, i.e. c'est $D(0, 1)$. Pour $|z| < 1$ on a $|-z^2| = |z|^2 < 1$ et donc (série géométrique de raison $-z^2$)

$$f(z) = 2z \times \frac{1}{1 - (-z^2)} = 2z \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \times (-1)^n z^{2n+1}.$$

ii) *En déduire le développement en série entière de F en 0. On précisera sur quel disque ce développement a lieu.*

F est holomorphe donc analytique sur Ω et $D(0, 1)$ est le plus grand disque centré en 0 inclus dans Ω (voir le dessin ci-dessous). La fonction F est donc DSE en 0 sur $D(0, 1)$. Si on écrit $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ on a alors, pour tout $z \in D(0, 1)$, $F'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)a_{n+1}z^n$. Comme $F'(z) = f(z)$ la question précédente permet d'affirmer que

$$F(z) \;=\; F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \times (-1)^n}{2n + 2} z^{2n+2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} z^{2n+2}.$$



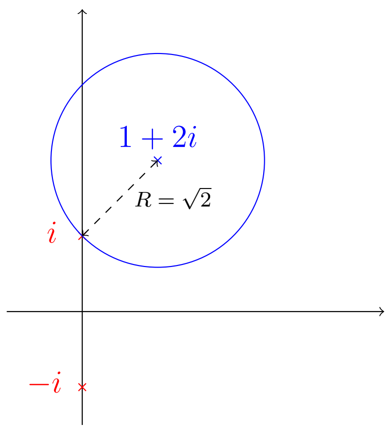
Disque des DSE de f et F en 0

d) *Justifier que f et F admettent un développement en série entière en $1+2i$. Dans chacun des cas on ne* <u>*cherchera pas à calculer le développement*</u> *mais on précisera le plus grand disque sur lequel la fonction est égale à son développement.*

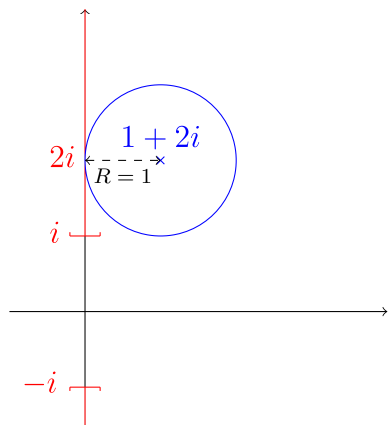
Les fonctions f et F sont holomorphes, donc analytiques, respectivement sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et Ω. Le point $1+2i$ est dans ces deux ensembles donc f et F sont bien toutes les deux DSE en $1+2i$. Le plus grand disque sur lequel ce développement a lieu est le plus grand disque (ouvert) centré en $1+2i$ et inclus dans l'ensemble de définition de f, respectivement de F.

Pour f le rayon est donc le plus grand $R > 0$ tel que $|i-(1+2i)| \geq R$ et $|-i-(1+2i)| \geq R$. On a $|i-(1+2i)| = |-1-i| = \sqrt{2}$ et $|-i-(1+2i)| = |-1-3i| = \sqrt{10}$. On en déduit que le DSE de f en $1+2i$ a lieu sur le disque $D(1+2i, \sqrt{2})$.

Pour F le rayon est le plus grand $R > 0$ tel que $D(1+2i, R) \cap \{z = iy \,|\, y \in \mathbb{R},\, |y| \geq 1\} = \emptyset$. On a $2i \in \{z = iy \,|\, y \in \mathbb{R},\, |y| \geq 1\}$ et $|2i-(1+2i)| = 1$ donc $R \leq 1$. Et si $z = iy$ avec $|y| \geq 1$ on a $|z-(1+2i)| = |-1+i(y-2)| \geq 1$ (le module est plus grand que la valeur absolue de la partie réelle) donc $D(1+2i, 1) \cap \{z = iy \,|\, y \in \mathbb{R},\, |y| \geq 1\} = \emptyset$. On en déduit que le DSE de F en $1+2i$ a lieu sur le disque $D(1+2i, 1)$ (pas sur le même disque que celui de f).



Disque du DSE de f en $1+2i$



Disque du DSE de F en $1+2i$

<u>Remarque</u> : en décomposant f en éléments simples, $f(z) = \dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}$, on peut obtenir le DSE de f en $1+2i$. On écrit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+3i} \times \frac{1}{1+\frac{z-1-2i}{1+3i}} + \frac{1}{1+i} \times \frac{1}{1+\frac{z-1-2i}{1+i}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \left(\frac{1}{(1+3i)^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-1-2i)^n, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est valable si $\left|\frac{z-1-2i}{1+3i}\right| < 1$, i.e. $|z-1-2i| < \sqrt{10}$, et $\left|\frac{z-1-2i}{1+i}\right| < 1$, i.e. $|z-1-2i| < \sqrt{2}$. On retrouve bien que le DSE est donc valable sur le disque $D(1+2i, \sqrt{2})$.

En raisonnant comme à la question c)ii) on peut obtenir le DSE de F en $1+2i$,

$$F(z) = F(1+2i) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \times \left(\frac{1}{(1+3i)^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-1-2i)^{n+1}$$

avec $F(1+2i) = \ln(\sqrt{20}) + i\arg_{]-\pi,\pi[}(-2+4i)$. Le rayon de convergence de cette série entière est identique à celui obtenu dans le développement de f, c'est-à-dire $\sqrt{2}$. Cependant la série entière ne coincide avec F que sur le disque $D(1+2i, 1)$.

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. On notera P et Q ses parties réelles et parties imaginaires.*

a) *On suppose que $Q = 0$. Montrer à l'aide des équations de Cauchy-Riemann que f est constante.*

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc les fonctions $P : (x, y) \mapsto \mathrm{Re}(f(x + iy))$ et $Q : (x, y) \mapsto \mathrm{Im}(f(x + iy))$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Par hypothèse on a $Q(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donc de même $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$. Les équations de Cauchy-Riemann donnent donc que $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs on en déduit que P est constante.

Finalement les parties réelles P et imaginaires Q de f sont constantes donc f est constante (égale à un nombre réel puisque Q est nulle par hypothèse).

b) *On suppose maintenant uniquement que $Q \geq 0$.*

i) *Montrer que la fonction $g(z) = \dfrac{f(z)}{i + f(z)}$ est bien définie sur $\mathbb{C}$ et est holomorphe.*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{Im}(i + f(z)) = 1 + \mathrm{Im}(f(z)) \geq 1$ donc $i + f(z)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction g est donc bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas.

ii) *Montrer que $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $P(z)$ et $Q(z)$ les parties réelles et imaginaires de $f(z)$. On a alors

$$|g(z)|^2 = \frac{|f(z)|^2}{|i + f(z)|^2} = \frac{P(z)^2 + Q(z)^2}{P(z)^2 + (1 + Q(z))^2}.$$

Comme $Q(z) \geq 0$ par hypothèse on a

$$P(z)^2 + (1 + Q(z))^2 = P(z)^2 + Q(z)^2 + 2Q(z) + 1 \geq P(z)^2 + Q(z)^2 + 1 > P(z)^2 + Q(z)^2,$$

et comme $P(z)^2 + (1 + Q(z))^2 > 0$ on en déduit $|g(z)|^2 = \dfrac{P(z)^2 + Q(z)^2}{P(z)^2 + (1 + Q(z))^2} < 1$ et donc $|g(z)| < 1$.

iii) *Montrer que g est constante. En déduire que f est constante.*

La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est bornée (par 1) d'après la question précédente. Le théorème de Liouville permet d'affirmer que la fonction g est constante, égale à $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < 1$ (en particulier $\alpha \neq 1$).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a donc, puisque $i + f(z) \neq 0$,

$$\frac{f(z)}{i + f(z)} = \alpha \iff f(z) = i\alpha + \alpha f(z) \overset{\alpha \neq 1}{\iff} f(z) = \frac{i\alpha}{1 - \alpha}.$$

La fonction f est donc bien constante.

Exercice 4 (9pts). *Une autre preuve du théorème de Liouville.*
Le but de l'exercice est de proposer une autre démonstration du théorème de Liouville que celle vue en cours. Dans tout l'exercice on n'utilisera donc pas ce théorème.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si $R > 0$ on note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R, parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Pour $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq R$ on notera $I_a(R)$ l'intégrale $I_a(R) = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{af(z)}{z(z-a)}\,\mathrm{d}z$.

a) *Enoncer le théorème des résidus.*

Voir le cours.

b) *Justifier rapidement que $g(z) = \dfrac{af(z)}{z(z-a)}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer ses pôles et calculer le résidu de g en chacun d'entre eux. On exprimera la valeur de ces résidus en fonction de $f(0)$ et $f(a)$.*

Les fonctions f et $h : z \mapsto z(z-a)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, connexe par arcs, avec h pas identiquement nulle donc g est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Les singularités de g sont les zéros du dénominateur h, ici 0 et a. De plus ce sont des zéros d'ordre 1 de h (h est un polynôme de degré 2, il ne peut donc avoir plus de 2 racines comptées avec multiplicité).

Si $f(0) = 0$ alors 0 est une singularité artificielle de g et si $f(0) \neq 0$ alors 0 est un pôle simple de g. Dans ce cas on a $\mathrm{Res}(g, 0) = \frac{af(0)}{h'(0)} = -f(0)$.

De même, si $f(a) = 0$ alors a est une singularité artificielle de g et si $f(a) \neq 0$ alors a est un pôle simple de g. Dans ce cas on a $\mathrm{Res}(g, a) = \frac{af(a)}{h'(a)} = f(a)$.

c) *Justifier que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R \neq |a|$ l'intégrale $I_a(R)$ est bien définie et calculer sa valeur. <u>Indication</u> : on distinguera selon que $R < |a|$ ou $R > |a|$.*

La fonction g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses seuls pôles éventuels sont 0 et a. Si $R \neq |a|$ ces pôles ne sont pas sur γ_R donc $I_a(R)$ est bien définie. Comme $\mathbb{C}$ est étoilé on peut donc appliquer le théorème des résidus pour calculer $I_a(R)$.

On rappelle que si z_0 est une singularité artificielle de g on a $\mathrm{Res}(g, z_0) = 0$ donc quelques soient les valeurs de $f(0)$ et $f(a)$ on peut écrire, d'après le théorème des résidus,

$$I_a(R) = 2i\pi\big(\mathrm{Ind}(\gamma_R, 0) \times \underbrace{\mathrm{Res}(g,0)}_{=-f(0)} + \mathrm{Ind}(\gamma_R, a) \times \underbrace{\mathrm{Res}(g,a)}_{=f(a)}\big).$$

Dans tous les cas on a $\mathrm{Ind}(\gamma_R, 0) = 1$ et si $R < |a|$ on a $\mathrm{Ind}(\gamma_R, a) = 0$ tandis que si $R > |a|$ on a $\mathrm{Ind}(\gamma_R, a) = 1$. Finalement on trouve

$$I_a(R) = \begin{cases} -2i\pi f(0), & \text{si } R < |a|, \\ 2i\pi\big(f(a) - f(0)\big), & \text{si } R > |a|. \end{cases}$$

On suppose par la suite qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

d) *Paramétrer le chemin γ_R. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R > |a|$ on a $|I_a(R)| \leq \dfrac{2\pi|a|M}{R - |a|}$.*

On paramètre γ_R par $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$ sur $[0, 2\pi]$. On a alors

$$I_a(R) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{af\left(R\mathrm{e}^{it}\right)}{R\mathrm{e}^{it}\left(R\mathrm{e}^{it} - a\right)} \times iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; ia\int_0^{2\pi} \frac{f\left(R\mathrm{e}^{it}\right)}{R\mathrm{e}^{it} - a}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $R > |a|$ on a, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\left|Re^{it} - a\right| \geq R - |a| > 0$ et donc finalement

$$|I_a(R)| \;\leq\; |a| \int_0^{2\pi} \frac{|f\left(Re^{it}\right)|}{|Re^{it} - a|} \, \mathrm{d}t \;\leq\; |a| \int_0^{2\pi} \frac{M}{R - |a|} \, \mathrm{d}t \;=\; \frac{2\pi |a| M}{R - |a|}.$$

e) *En utilisant les questions c) et d) montrer que $f(a) = f(0)$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$.*

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. D'après c) si $R > |a|$ on a $I_a(R) = 2i\pi\big(f(a) - f(0)\big)$. Donc, d'après d), pour tout $R > |a|$ on a

$$\left|2i\pi\big(f(a) - f(0)\big)\right| \leq \frac{2\pi|a|M}{R - |a|} \quad \Longleftrightarrow \quad |f(a) - f(0)| \leq \frac{M|a|}{R - |a|}.$$

Comme $\lim\limits_{R \to +\infty} \dfrac{M|a|}{R - |a|} = 0$ et que l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $R > |a|$ (on peut donc faire $R \to +\infty$) on en déduit que $f(a) = f(0)$.

f) *Enoncer le théorème de Liouville et utiliser ce qui précède pour le démontrer.*

Le théorème de Liouville dit que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est bornée alors elle est constante.

Ici on a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et l'hypothèse "il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$" signifie exactement que f est bornée. Sous les hypothèses du théorème de Liouville on a donc montré que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ on avait $f(a) = f(0)$. Comme évidemment $f(0) = f(0)$ cela veut dire que $f(a) = f(0)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, autrement dit f est constante égale à $f(0)$. On a bien montré que f était constante.