
Analyse complexe: examen de session 1

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.

Les téléphones portables et objets connectés sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.

Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Total des points sur 30 (le barème de chaque exercice est donné à titre indicatif).

Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.

Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1 (3pts). On note j le nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

b) Rappeler la définition de la fonction Log, détermination principale du logarithme, et calculer $\text{Log}(1 + j)$ et $\text{Log}(1 + j^2)$.

Exercice 2 (12pts). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ par $f(z) = \frac{2z}{1 + z^2}$.

a) i) On considère le chemin γ dont l'image est le cercle de centre i et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Justifier que $\int_{\gamma} f(z) dz$ est bien définie et calculer sa valeur.

Indication: on pourra utiliser au choix la formule de Cauchy ou le théorème des résidus, mais on justifiera soigneusement leur utilisation.

ii) Montrer que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$.

b) i) On note Log la détermination principale du logarithme. Montrer que $\text{Log}(1 + z^2)$ est bien défini pour tout $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$, puis que la fonction F définie sur Ω par $F(z) = \text{Log}(1 + z^2)$ est une primitive de f .

ii) On considère le chemin $\tilde{\gamma}$ dont l'image est le segment $[z_0, z_1]$ avec $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Justifier que l'intégrale $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$ est bien définie et calculer sa valeur. Indication: on pourra être amené à utiliser le résultat de l'Exercice 1.

c) i) Donner le développement en série entière de f en 0. On précisera sur quel disque ce développement a lieu.

ii) En déduire le développement en série entière de F en 0. On précisera sur quel disque ce développement a lieu.

d) Justifier que f et F admettent un développement en série entière en $1 + 2i$. Dans chacun des cas on ne cherchera pas à calculer le développement mais on précisera le plus grand disque sur lequel la fonction est égale à son développement.

Exercice 3 (6pts). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On notera P et Q ses parties réelles et parties imaginaires.

a) On suppose que $Q = 0$. Montrer à l'aide des équations de Cauchy-Riemann que f est constante.

b) On suppose maintenant uniquement que $Q \geq 0$.

i) Montrer que la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{i + f(z)}$ est bien définie sur $\mathbb{C}$ et est holomorphe.

ii) Montrer que $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

iii) Montrer que g est constante. En déduire que f est constante.

Exercice 4 (9pts). Une autre preuve du théorème de Liouville.

Le but de l'exercice est de proposer une autre démonstration du théorème de Liouville que celle vue en cours. Dans tout l'exercice on n'utilisera donc pas ce théorème.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si $R > 0$ on note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R , parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Pour $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq R$ on notera $I_a(R)$ l'intégrale

$$I_a(R) = \int_{\gamma_R} \frac{af(z)}{z(z-a)} dz.$$

a) Énoncer le théorème des résidus.

b) Justifier rapidement que $g(z) = \frac{af(z)}{z(z-a)}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer ses pôles et calculer le résidu de g en chacun d'entre eux. On exprimera la valeur de ces résidus en fonction de $f(0)$ et $f(a)$.

c) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R \neq |a|$ l'intégrale $I_a(R)$ est bien définie et calculer sa valeur. Indication: on distinguera selon que $R < |a|$ ou $R > |a|$.

On suppose par la suite qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

d) Paramétrer le chemin γ_R . En déduire que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R > |a|$ on a $|I_a(R)| \leq \frac{2\pi|a|M}{R - |a|}$.

e) En utilisant les questions c) et d) montrer que $f(a) = f(0)$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$.

f) Énoncer le théorème de Liouville et utiliser ce qui précède pour le démontrer.