L3 Mathématiques
23 juin 2022

Analyse complexe : session de rattrapage

Durée : 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables et objets connectés sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

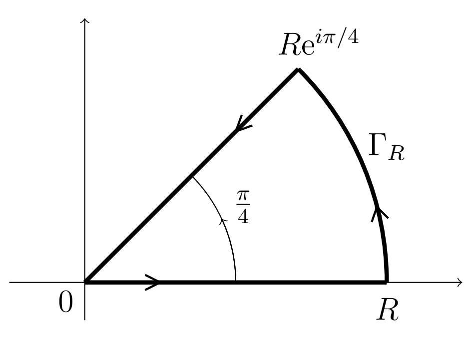
Exercice 1 (4pts). Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe on note P et Q ses parties réelles et imaginaires, i.e. $P(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy))$ et $Q(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(x+iy))$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f telles que $P(x,y) = Q(x,y)^2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (7pts). Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on note $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.
a) Donner un exemple de fonction holomorphe non constante tel que $Z(f)$ soit vide. Vous justifierez votre réponse.
b) Donner un exemple de fonction holomorphe non constante tel que $Z(f)$ soit infini. Vous justifierez votre réponse.
c) Soit $A = \{z_1, \dots, z_n\}$ un ensemble fini. Donner un exemple de fonction holomorphe tel que $Z(f) = A$.
d) Donner la définition d'un point isolé d'un ensemble E puis rappeler le principe des zéros isolés.
e) Montrer que si f est holomorphe et n'est pas la fonction nulle alors pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ l'ensemble $Z(f) \cap K$ est un ensemble fini, éventuellement vide. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3 (9pts). Le but de l'exercice est de montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t$$

convergent et de calculer leur valeur. Si $R > 0$ on notera également I_R l'intégrale $I_R = \displaystyle\int_0^R \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$.
Etant donné $R > 0$ on note Γ_R le lacet représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct



On notera $\gamma_{1,R}$ le segment d'extrêmités 0 et R, $\gamma_{2,R}$ l'arc de cercle de centre 0 d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et partant de R, et $\gamma_{3,R}$ le segment d'extrêmités $R\mathrm{e}^{i\pi/4}$ et 0, tous parcourus dans le même sens que sur le dessin. Soit enfin f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \mathrm{e}^{iz^2}$.

a) Montrer que pour tout $R > 0$ on a $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

b) Donner un paramétrage de chacun des 3 chemins $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$ et $\gamma_{3,R}$.

c) Exprimer $\displaystyle\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ à l'aide de I_R.

d) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_{3,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Indication : on pourra utiliser que $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

f) Déduire des questions précédentes que I converge et donner sa valeur. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

g) Donner les valeurs de J et K.