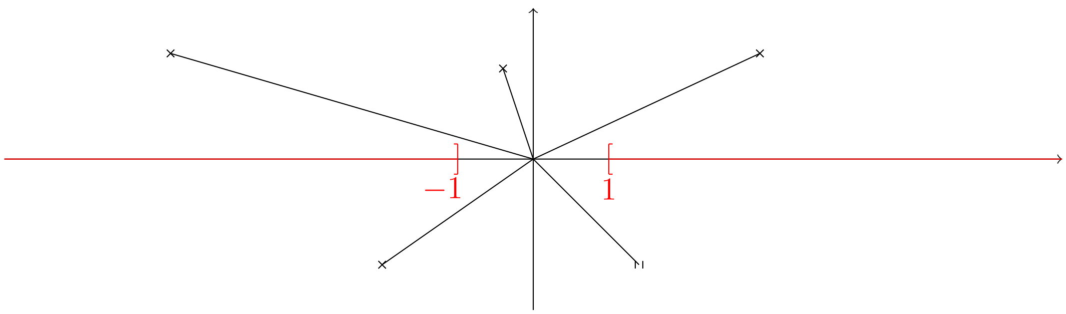
L3 Mathématiques
17 décembre 2021

Analyse complexe : corrigé du contrôle final

Exercice 1. *Soit Ω l'ouvert $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$. On ne demande pas de justifier que Ω est bien un ouvert. Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$.*

a) *Montrer que Ω est étoilé. On pourra utiliser un argument graphique.*



Ω est le complémentaire des deux demi-droites en rouge. Il est étoilé par rapport à $z_0=0$.

b) *Montrer que f admet des primitives sur Ω (on ne demande pas de les calculer) et justifier qu'elle a une unique primitive qui s'annule en 0. Par la suite on notera F cette primitive.*

La fonction f est holomorphe sur Ω (quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas). Comme Ω est étoilé cela garantit que f admet des primitives sur Ω.

Si g est une primitive de f sur Ω alors la fonction h définie sur Ω par $h(z)=g(z)-g(0)$ est une primitive de f qui s'annule en 0. f a donc au moins une primitive qui s'annule en 0. Il reste à montrer qu'une telle primitive est unique. Supposons que h_1 et h_2 sont deux primitives de f qui s'annulent en 0, on montre que $h_1=h_2$. La fonction h_1-h_2 est une fonction holomorphe sur Ω et $(h_1-h_2)'=h_1'-h_2'=f-f=0$. Ω est connexe par arcs donc h_1-h_2 est constante. Comme elle s'annule en 0 cela prouve que $h_1-h_2=0$, i.e. $h_1=h_2$.

c) *On note* Log *la détermination principale du logarithme. Montrer que la fonction G donnée par $G(z)=\operatorname{Log}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ est bien définie sur Ω.*

La fonction Log est définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Il suffit donc de montrer que pour tout $z\in\Omega$ on a $\dfrac{1-z}{1+z}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Si $z\in\Omega$, soit $\mathrm{Im}(z)\neq 0$, soit $\mathrm{Im}(z)=0$ et alors $z=x\in\mathbb{R}$ avec $-1<x<1$.

- Si $\mathrm{Im}(z)\neq 0$, on a $\dfrac{1-z}{1+z}=\dfrac{(1-z)(1+\bar z)}{|1+z|^2}=\dfrac{1-|z|^2+\bar z-z}{|1+z|^2}=\dfrac{1-|z|^2-2i\mathrm{Im}(z)}{|1+z|^2}$, donc $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)\neq 0$ et $\dfrac{1-z}{1+z}\notin\mathbb{R}_-$.
- Si $\mathrm{Im}(z)=0$ et $z=x$ avec $-1<x<1$, alors $1-z=1-x>0$ et $1+z=1+x>0$ donc $\dfrac{1-z}{1+z}\in]0,+\infty[$. On a bien $\dfrac{1-z}{1+z}\notin\mathbb{R}_-$.

d) *Justifier que G est holomorphe sur Ω et calculer G'.*

La fonction $g:\Omega\to\mathbb{C}$ définie par $g(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$ est holomorphe sur Ω, la fonction $h=\operatorname{Log}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et d'après la question précédente $g(\Omega)\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. La fonction

$G = h \circ g$ est donc holomorphe sur Ω comme composée de fonctions holomorphes. De plus, pour tout $z \in \Omega$ on a

$$G'(z) \;=\; g'(z) \times h' \circ g(z) \;=\; \frac{-2}{(1+z)^2} \times \frac{1}{\frac{1-z}{1+z}} \;=\; \frac{2}{z^2-1}.$$

e) *En déduire une expression de F.*

Pour tout $z \in \Omega$ on a $\dfrac{1}{2}G'(z) = f(z)$ donc $\dfrac{1}{2}G$ est une primitive de f sur Ω. On vérifie que $G(0) = 0$. Conclusion $F = \dfrac{1}{2}G$, i.e. $F(z) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)$.

Exercice 2. *Soient f, g deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

a) *Que peut-on dire de f si g est la fonction nulle ?*

Si g est nulle, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \leq |g(z)| = 0$ et donc f est aussi la fonction nulle.

Dans toute la suite on supposera que g n'est pas la fonction nulle. On considère la fonction $h = \frac{f}{g}$.

b) *Justifier que h est méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

h est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, connexe par arcs, dont le dénominateur n'est pas la fonction nulle. Donc h est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

c) *Montrer que h se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On notera toujours h ce prolongement.*

Pour montrer que h se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ il faut montrer que toutes les singularités de h sont artificielles. Soit donc z_0 une singularité de h. z_0 est un zéro de g et d'après le principe des zéros isolés il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $g(z) \neq 0$. Ainsi, pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $|h(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1$. La fonction h est bornée au voisinage de z_0 et donc z_0 est bien une singularité artificielle de h.

d) *Montrer que h est bornée sur $\mathbb{C}$.*

Le raisonnement de la question précédente montre que en dehors de ses singularités la fonction h vérifie $|h(z)| \leq 1$. Par ailleurs le prolongement de h en une singularité z_0 est tel que $h(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} h(z)$ et donc, par passage à la limite dans les inégalités on a aussi $|h(z_0)| \leq 1$. La fonction h est donc bornée par 1.

e) *Montrer qu'il existe $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ telle que $f = \lambda g$.*

La fonction h est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée donc, d'après le théorème de Liouville, h est constante. Si on note λ cette constante, comme h est bornée par 1 on a nécessairement $|\lambda| \leq 1$. Pour tout z tel que $g(z) \neq 0$ on a donc $f(z) = h(z)g(z) = \lambda g(z)$. Et si $g(z) = 0$ on a $f(z) = 0 = \lambda g(z)$. Conclusion : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| \leq 1$ tel que $f = \lambda g$.

f) *Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = |\mathrm{e}^z|$. Si f vérifie $|f(z)| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout z on peut donc appliquer ce qui précède avec la fonction holomorphe $g(z) = \mathrm{e}^z$. Et donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$, tel que $f = \lambda \exp$.

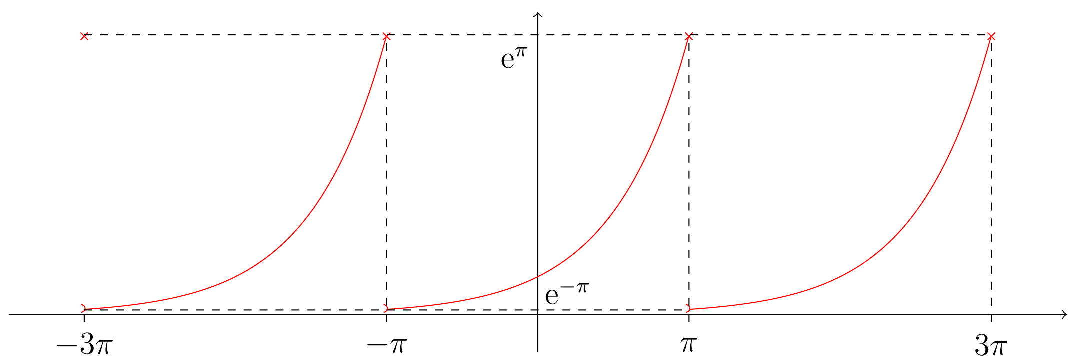
Réciproquement on vérifie que si $f = \lambda \exp$ avec $|\lambda| \leq 1$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a bien $|f(z)| = |\lambda \mathrm{e}^z| = |\lambda| \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.

Conclusion : les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui vérifient $|f(z)| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ sont les fonctions $\lambda \exp$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 3. *Le but de ce problème est de calculer par deux méthodes différentes la somme de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. *Les deux parties sont totalement indépendantes. On rappelle que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on note* $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ *et* $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Partie I. *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique définie sur* $]-\pi,\pi]$ *par* $f(x) = e^x$.

a) *Représenter graphiquement* f *sur* $[-3\pi, 3\pi]$.



b) *Montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de* f *vérifient* $c_n(f) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{1-in}$.

La fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux. En effet, elle est continue sur $]-\pi,\pi[$ et admet des limites finies à droite et à gauche en π : $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = e^{\pi}$ et $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to(-\pi)^+} f(x) = e^{-\pi}$. Ses coefficients de Fourier exponentiels sont alors définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx \\ &\overset{1-in\neq 0}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi-in\pi} - e^{-\pi+in\pi}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{1-in}. \end{aligned}$$

c) *Donner la série de Fourier de* f. *Justifier qu'elle converge simplement et calculer sa somme pour* $x \in [-\pi,\pi]$. *On justifiera soigneusement l'utilisation de tout théorème du cours.*

La série de Fourier de f est la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{1-in}.$$

La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a déjà vu qu'elle était continue par morceaux. De plus elle est C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et f' admet des limites finies en π : $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = e^{\pi}$ et

$\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to(-\pi)^+} f'(x) = \mathrm{e}^{-\pi}$. D'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ sa somme $S(f)(x)$ vaut $\dfrac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ où $f(x_\pm) = \lim_{t\to x^\pm} f(t)$. En particulier là où f est continue on a $S(f)(x) = f(x)$.

Ici la fonction f est continue sur $]-\pi, \pi[$ et ne l'est pas en $-\pi$ et en π. On trouve ainsi $S(f)(x) = \mathrm{e}^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $S(f)(-\pi) = S(f)(\pi) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{\pi}}{2} = \cosh(\pi)$.

d) *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *converge et donner la valeur de sa somme.*

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = c_0(f) + \sum_{n\geq 1} \left(c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-inx} + c_n(f)\mathrm{e}^{inx}\right)$. Ici on obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(f)(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{-n}\mathrm{e}^{-inx}}{1+in} + \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{inx}}{1-in} \right).$$

En $x = 0$ on a ainsi

$$S(f)(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{-n}}{1+in} + \frac{(-1)^n}{1-in} \right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}}{1+n^2}.$$

En utilisant la question c) on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(S(f)(0) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right) = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(f(0) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right) = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

Partie II. *On considère la fonction g définie par* $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)\sin(\pi z)}$.

a) i) *Justifier que g définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

La fonction $h(z) = (z^2+1)\sin(\pi z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, connexe par arcs, et n'est pas la fonction nulle. Donc $g = \frac{1}{h}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) *Déterminer les pôles de g en précisant leur ordre.*

g est un quotient de fonctions holomorphes et son numérateur ne s'annule pas. Les pôles de g sont donc les zéros de son dénominateur h et leur ordre est l'ordre de multiplicité de ces zéros. Si $z \in \mathbb{C}$ on a $h(z) = 0$ si et seulement si $z^2 + 1 = 0$, i.e. $z = i$ ou $z = -i$, ou $\sin(\pi z) = 0$, i.e. $z \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles de g est donc $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \cup \{i; -i\}$.

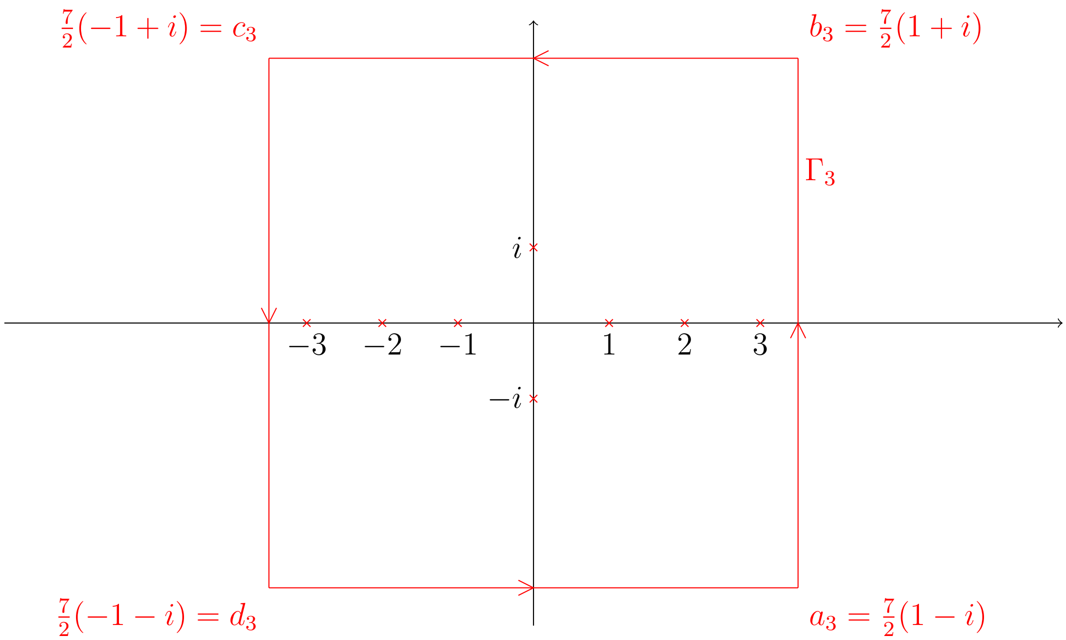
On a par ailleurs $h'(z) = 2z\sin(\pi z) + \pi(z^2+1)\cos(\pi z)$. On a ainsi $h'(i) = 2i\sin(i\pi) = \mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{\pi} \neq 0$, $h'(-i) = -2i\sin(-i\pi) = \mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{\pi} \neq 0$ et, si $n \in \mathbb{Z}$, $h'(n) = \pi(n^2 + 1)\cos(n\pi) = \pi(-1)^n(n^2+1) \neq 0$. Les zéros de h sont tous des zéros d'ordre 1 donc tous les pôles de g sont des pôles simples.

iii) *Calculer le résidu de g en chacun de ses pôles.*

Comme les pôles de g sont tous des zéros d'ordre 1 du dénominateur h de $g = \frac{1}{h}$, pour tout $z \in \mathcal{P}$ on a $\mathrm{Res}(g, z) = \dfrac{1}{h'(z)}$. On trouve ainsi $\mathrm{Res}(g, i) = \mathrm{Res}(g, -i) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{\pi}} = \dfrac{-1}{2\sinh(\pi)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Res}(g, n) = \dfrac{1}{\pi(-1)^n(n^2+1)} = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$.

b) *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_N le chemin fermé donné par le carré, parcouru une fois dans le sens direct, dont les sommets sont les points d'affixes $a_N = \left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $b_N = \left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $c_N = -\left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$ et $d_N = -\left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$.*

i) *Représenter le lacet Γ_3 et placer sur le graphe les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_3.*



ii) *Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$ préciser quels sont les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_N.*

Si $z \in \mathbb{C}$, z est à l'intérieur de Γ_N si et seulement si $|\mathrm{Re}(z)| < N + \dfrac{1}{2}$ et $|\mathrm{Im}(z)| < N + \dfrac{1}{2}$. On en déduit que les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_N sont $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, |n| \leq N\} \cup \{i; -i\}$.

iii) *Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et montrer que*

$$\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 2i\left(1 + 2S_N - \frac{\pi}{\sinh(\pi)}\right).$$

où S_N désigne la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

La fonction g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier et aucun pôle de g n'est sur Γ_N donc en particulier g est continue le long du chemin Γ_N. L'intégrale est donc bien définie. Par ailleurs comme $\mathbb{C}$ est un ouvert étoilé on peut utiliser le théorème des résidus pour calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z$. D'après la question précédente on a $\mathrm{Ind}(\Gamma_N, i) = \mathrm{Ind}(\Gamma_N, -i) = 1$, $\mathrm{Ind}(\Gamma_N, n) = 1$ si $|n| \leq N$ et $\mathrm{Ind}(\Gamma_N, n) = 0$ sinon. En utilisant la question a)iii) on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z &= 2i\pi\left(\mathrm{Res}(g,i) + \mathrm{Res}(g,-i) + \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{Res}(g,n)\right) \\
&= 2i\pi\left(\frac{-1}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2\sinh(\pi)} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2i\pi\left(-\frac{1}{\sinh(\pi)}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^{-n}}{1+(-n)^2}+\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)\right)\\
&= 2i\left(-\frac{\pi}{\sinh(\pi)}+1+2S_N\right).
\end{aligned}
$$

c) *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note γ_1 le segment $[a_N, b_N]$, γ_2 le segment $[b_N, c_N]$, γ_3 le segment $[c_N, d_N]$ et γ_4 le segment $[d_N, a_N]$.*

i) *Donner un paramétrage de chacun des segments γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4.*

On paramètre

- $[a_N, b_N]$ par $\gamma_1(t) = N + \frac{1}{2} + it$ sur $\left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$,
- $[b_N, c_N]$ par $\gamma_2(t) = -t + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$ sur $\left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$,
- $[c_N, d_N]$ par $\gamma_3(t) = -\left(N+\frac{1}{2}\right) - it$ sur $\left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$,
- $[d_N, a_N]$ par $\gamma_4(t) = t - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$ sur $\left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$.

ii) *Montrer que pour tout point de γ_1 on a*

$$\sin(\pi\gamma_1(t)) = (-1)^N\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}}{2},$$

et que de même pour tout point de γ_3 on a

$$\sin(\pi\gamma_3(t)) = (-1)^{N+1}\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}}{2}.$$

Soit $t \in \left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$. On a

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi\gamma_1(t)) &= \frac{1}{2i}\big(\exp\left(i\pi\gamma_1(t)\right)-\exp\left(-i\pi\gamma_1(t)\right)\big)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(iN\pi+\frac{i\pi}{2}-\pi t\right)-\exp\left(-iN\pi-\frac{i\pi}{2}+\pi t\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left((-1)^N\times i\times\mathrm{e}^{-\pi t}-(-1)^N\times(-i)\times\mathrm{e}^{\pi t}\right)\\
&= (-1)^N\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi t}+\mathrm{e}^{\pi t}}{2}\\
&= (-1)^N\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}}{2}.
\end{aligned}
$$

De même pour $t \in \left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$,

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi\gamma_3(t)) &= \frac{1}{2i}\big(\exp\left(i\pi\gamma_3(t)\right)-\exp\left(-i\pi\gamma_3(t)\right)\big)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(-iN\pi-\frac{i\pi}{2}+\pi t\right)-\exp\left(iN\pi+\frac{i\pi}{2}-\pi t\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left((-1)^N\times(-i)\times\mathrm{e}^{\pi t}-(-1)^N\times i\times\mathrm{e}^{-\pi t}\right)\\
&= (-1)^{N+1}\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi t}+\mathrm{e}^{\pi t}}{2}\\
&= (-1)^{N+1}\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}}{2}.
\end{aligned}
$$

iii) *Montrer que pour tout point z de γ_2 on a $|\sin(\pi\gamma_2(t))| \geq \dfrac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})}-\mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}$ et qu'il en est de même pour tout point de γ_4.*

Soit $t \in \left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$. On a

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\gamma_2(t)) &= \frac{1}{2i}\big(\exp(i\pi\gamma_2(t)) - \exp(-i\pi\gamma_2(t))\big) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(-N\pi - \frac{\pi}{2} - i\pi t\right) - \exp\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + i\pi t\right)\right).
\end{aligned}$$

On rappelle que $|e^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$. Comme $\exp\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right) > \exp\left(-N\pi - \frac{\pi}{2}\right)$, l'inégalité triangulaire inversée donne

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi\gamma_2(t))| &\geq \frac{1}{2}\left(\left|\exp\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + i\pi t\right)\right| - \left|\exp\left(-N\pi - \frac{\pi}{2} - i\pi t\right)\right|\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement montrer que pour tout $t \in \left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$ on a

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\gamma_4(t)) &= \frac{1}{2i}\big(\exp(i\pi\gamma_4(t)) - \exp(-i\pi\gamma_4(t))\big) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + i\pi t\right) - \exp\left(-N\pi - \frac{\pi}{2} - i\pi t\right)\right),
\end{aligned}$$

et donc, toujours en utilisant l'inégalité triangulaire inversée,

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi\gamma_4(t))| &\geq \frac{1}{2}\left(\left|\exp\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + i\pi t\right)\right| - \left|\exp\left(-N\pi - \frac{\pi}{2} - i\pi t\right)\right|\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}.
\end{aligned}$$

iv) *En déduire que pour tout $z \in \Gamma_N$ on a $|\sin(\pi z)| \geq \frac{1}{2}$.*

Si z est sur γ_1 on a $|\sin(\pi z)| = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))}}{2} \geq \dfrac{1}{2}$ car $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))}$ et $\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))}$ sont tous les deux positifs et l'un est supérieur où égal à 1 (car soit $\mathrm{Im}(\gamma_1(t))$ soit $-\mathrm{Im}(\gamma_1(t))$ est positif). Et on a exactement le même argument sur γ_3.

Si z est sur γ_2 ou γ_4 on a $|\sin(\pi z)| \geq \dfrac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}$. Or $\mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})} < 1$ car $-\pi\left(N+\dfrac{1}{2}\right) < 0$ et $\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})} > \mathrm{e}$ car $\pi\left(N+\dfrac{1}{2}\right) > 1$. Finalement $|\sin(\pi z)| \geq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2} > \dfrac{1}{2}$ car $\mathrm{e} > 2$.

d) *En utilisant la question précédente montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La question précédente assure que pour tout $z \in \Gamma_N$ on a $|\sin(\pi z)| \geq \dfrac{1}{2}$. Par ailleurs, si $z \in \Gamma_N$ on a soit $|\mathrm{Re}(z)| = N + \dfrac{1}{2}$ soit $|\mathrm{Im}(z)| = N + \dfrac{1}{2}$. Dans tous les cas on a $|z| \geq N + \dfrac{1}{2}$ et donc $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 \geq \left(N+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = N^2 + N - \frac{3}{4} > 0$. Ainsi $\displaystyle\sup_{z\in\Gamma_N} |g(z)| \leq \frac{2}{N^2+N-\frac{3}{4}}$. Enfin la longueur de Γ_N est $L(\Gamma_N) = 4 \times (2N+1)$ et donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left|\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{z\in\Gamma_N} |g(z)| \times L(\Gamma_N) \leq \frac{16N+8}{N^2+N-\frac{3}{4}}.$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} \frac{16N+8}{N^2+N-\frac{3}{4}} = 0$ on en déduit que $\lim_{N\to+\infty} \int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

e) *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *converge et donner la valeur de sa somme.*

D'après la question b)iii), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_N = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

En utilisant la question d) on en déduit que $\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}$, i.e. la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}$.

Remarque : on retrouve évidemment le même résultat qu'à la question d) de la Partie I.