**L3 Mathématiques**
**17 décembre 2021**

# Analyse complexe: contrôle final

**Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.**
**Les téléphones portables et objets connectés sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.**
**Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.**
Total des points sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

**Exercice 1 (5pts).** Soit $\Omega$ l'ouvert $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. On ne demande pas de justifier que $\Omega$ est bien un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$.

**a)** Montrer que $\Omega$ est étoilé. On pourra utiliser un argument graphique.

**b)** Montrer que $f$ admet des primitives sur $\Omega$ (on ne demande pas de les calculer) et justifier qu'elle a une unique primitive qui s'annule en $0$. Par la suite on notera $F$ cette primitive.

**c)** On note $\mathrm{Log}$ la détermination principale du logarithme. Montrer que la fonction $G$ donnée par $G(z) = \mathrm{Log}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ est bien définie sur $\Omega$.

**d)** Justifier que $G$ est holomorphe sur $\Omega$ et calculer $G'$.

**e)** En déduire une expression de $F$.

**Exercice 2 (7pts).** Soient $f, g$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

**a)** Que peut-on dire de $f$ si $g$ est la fonction nulle?

Dans toute la suite on supposera que $g$ n'est pas la fonction nulle. On considère la fonction $h = \frac{f}{g}$.

**b)** Justifier que $h$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

**c)** Montrer que $h$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On notera toujours $h$ ce prolongement.

**d)** Montrer que $h$ est bornée sur $\mathbb{C}$.

**e)** Montrer qu'il existe $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ telle que $f = \lambda g$.

**f)** Trouver toutes les fonctions $f$ holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

**Exercice 3 (18pts).** Le but de ce problème est de calculer par deux méthodes différentes la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$. Les deux parties sont totalement indépendantes. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $\sin(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$ et $\sinh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z} - e^{-z}}{2}$.

**Partie I (5pts).** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

**a)** Représenter graphiquement $f$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

**TSVP**

**b)** Montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de $f$ vérifient $c_n(f) = \dfrac{\sinh(\pi)}{\pi} \times \dfrac{(-1)^n}{1-in}$.

**c)** Donner la série de Fourier de $f$. Justifier qu'elle converge simplement et calculer sa somme pour $x \in [-\pi, \pi]$. On justifiera soigneusement l'utilisation de tout théorème du cours.

**d)** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge et donner la valeur de sa somme.

**Partie II (13pts).** On considère la fonction $g$ définie par $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)\sin(\pi z)}$.

**a) i)** Justifier que $g$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

**ii)** Déterminer les pôles de $g$ en précisant leur ordre.

**iii)** Calculer le résidu de $g$ en chacun de ses pôles.

**b)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\Gamma_N$ le chemin fermé donné par le carré, parcouru une fois dans le sens direct, dont les sommets sont les points d'affixes $a_N = \left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $b_N = \left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $c_N = -\left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$ et $d_N = -\left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$.

**i)** Représenter le lacet $\Gamma_3$ et placer sur le graphe les pôles de $g$ qui sont à l'intérieur de $\Gamma_3$.

**ii)** Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$ préciser quels sont les pôles de $g$ qui sont à l'intérieur de $\Gamma_N$.

**iii)** Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et montrer que

$$\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 2i\left(1 + 2S_N - \frac{\pi}{\sinh(\pi)}\right).$$

où $S_N$ désigne la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

**c)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\gamma_1$ le segment $[a_N, b_N]$, $\gamma_2$ le segment $[b_N, c_N]$, $\gamma_3$ le segment $[c_N, d_N]$ et $\gamma_4$ le segment $[d_N, a_N]$.

**i)** Donner un paramétrage de chacun des segments $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ et $\gamma_4$.

**ii)** Montrer que pour tout point de $\gamma_1$ on a

$$\sin(\pi\gamma_1(t)) = (-1)^N \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{Im}(\gamma_1(t))}}{2},$$

et que de même pour tout point de $\gamma_3$ on a

$$\sin(\pi\gamma_3(t)) = (-1)^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{Im}(\gamma_3(t))} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{Im}(\gamma_3(t))}}{2}.$$

**iii)** Montrer que pour tout point de $\gamma_2$ on a $|\sin(\pi\gamma_2(t))| \geq \dfrac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}$ et qu'il en est de même pour tout point de $\gamma_4$.

**iv)** En déduire que pour tout $z \in \Gamma_N$ on a $|\sin(\pi z)| \geq \dfrac{1}{2}$.

**d)** En utilisant la question précédente montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

**e)** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge et donner la valeur de sa somme.