L3 Mathématiques
22 juin 2021

CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Analyse complexe : session de seconde chance

Durée : 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables et tous les objets connectés sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 pts). Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe on note P et Q ses parties réelles et imaginaires, i.e. $P(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy))$ et $Q(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(x+iy))$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f telles que $Q(x,y) = \exp\,(P(x,y))$ pour tous x, y.

Exercice 2 (4 pts).

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^n}$.

b) Lorsque la série converge on note $f(z)$ sa somme. La fonction f est-elle définie en $2+\mathrm{i}$?

c) Justifier que f admet un unique prolongement analytique défini sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Quelle est la valeur du prolongement analytique de f au point $2+\mathrm{i}$?

d) Donner le développement en séries entières du prolongement de f en $2+\mathrm{i}$ en précisant sur quel ensemble ce développement a lieu.

Exercice 3 (12 pts). Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice $\log$ désignera la détermination du logarithme définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}_-$, où $\mathrm{i}\mathbb{R}_- = \{\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, y \in]-\infty, 0]\}$, par $\log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}(z)$. On rappelle que cette fonction est holomorphe sur son ensemble de définition. Enfin on considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right)}{1+z^2}.$$

a) Justifier que l'intégrale I converge.

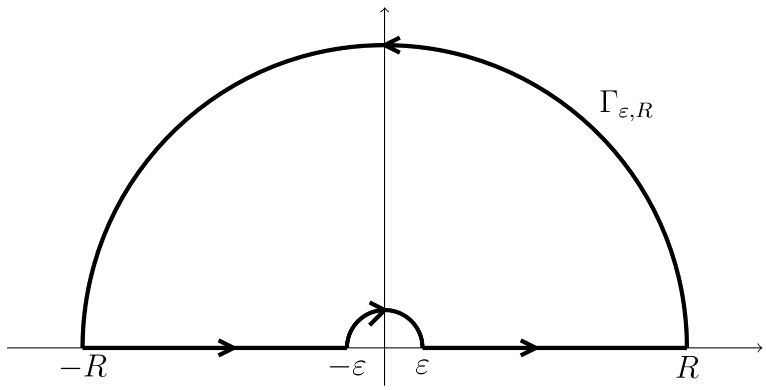
b) Calculer $\log(1)$, $\log(\mathrm{i})$ et $\log(-1)$.

c) Justifier que f définit une fonction méromorphe sur Ω.

d) Montrer que f admet un unique pôle z_0 que l'on précisera. Donner son ordre et calculer le résidu de f en z_0.

TSVP

Etant donnés $\varepsilon, R > 0$ tels que $0 < \varepsilon < 1 < R$ on considère le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct.



On notera par la suite γ_1 le demi-cercle de rayon R, γ_2 le segment d'extrêmités $-R$ et $-\varepsilon$, γ_3 le demi-cercle de rayon ε, et γ_4 le segment d'extrêmités ε et R, tous parcourus dans le même sens que sur le dessin.

e) Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Vous commencerez par reproduire rapidement le contour et placerez z_0 sur la figure, et vous justifierez soigneusement l'utilisation de tout théorème.

f) Donner un paramétrage de chacun des 4 chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4.

g) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. De même montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

h) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = I$.

i) Calculer de même $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ en fonction de I.

j) En déduire la valeur de I.