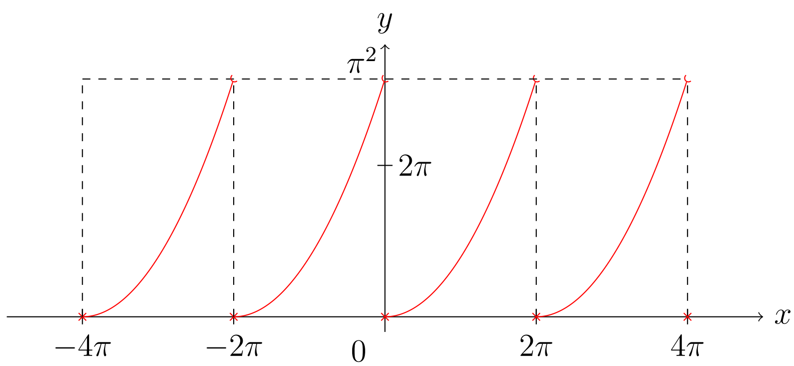
L3 Mathématiques
15 décembre 2020

Analyse complexe : corrigé du contrôle final

Exercice 1. *Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.*

a) *Montrer que f est C^1 par morceaux et tracer son graphe sur $[-4\pi, 4\pi]$.*

La fonction f est C^1 sur $]0, 2\pi[$ et 2π-périodique. De plus les limites de f et de f' en 0^+ et 0^- sont finies. En effet on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2\pi^-} f(x) = \pi^2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2\pi^-} f'(x) = \pi$. Donc f est C^1 par morceaux.



b) *Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient*

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \quad \textit{et, pour tout } n \geq 1,\ a_n(f) = \frac{1}{n^2} \quad \textit{et} \quad b_n(f) = -\frac{\pi}{n}.$$

On a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Si $n \geq 1$ on a d'une part

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\times\frac{x^2}{4}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\times\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{2nde IPP}}{=} -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\times\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{\cos(nx)}{n^2}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin(nx)}{2n^3}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\times\frac{x^2}{4}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}\times\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{2nde IPP}}{=} -\frac{\pi}{n} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[-\frac{\sin(nx)}{n^2}\times\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{\sin(nx)}{n^2}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{n} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{2n^3}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

c) *Justifier que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout $x\in[0,2\pi]$ la valeur de sa somme.*

La fonction f est 2π-périodique et C^1 par morceaux donc, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x\in[0,2\pi]$ la série de Fourier $S(f)$ de f converge et on a, avec $\lim\limits_{t\to x^{\pm}} f(t) = f(x_{\pm})$,

$$
\begin{aligned}
S(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} \\
\iff \quad & \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi\sin(nx)}{n} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x\in]0,2\pi[, \\[2ex] \dfrac{\pi^2}{2} & \text{si} \quad x\in\{0,2\pi\}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

d) *Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On prend $x=0$ dans la question précédente. Pour tout $n\geq 1$ on a alors $\cos(n\times 0)=1$ et $\sin(n\times 0)=0$, et donc

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si on prend $x=\pi$, pour tout $n\geq 1$ on a alors $\cos(n\pi)=(-1)^n$ et $\sin(n\pi)=0$ d'où

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

e) *Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad \textit{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Indication : on pourra être amené à utiliser les résultats obtenus à la question précédente.

La fonction f est continue par morceaux. D'après le théorème de Parseval on a donc

$$\begin{aligned} & \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 &=& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ \iff \quad & \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{n^2} \right) &=& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^4}{16} \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2\pi^4}{5}. \end{aligned}$$

Les séries de terme général $\dfrac{1}{n^4}$ et $\dfrac{\pi^2}{n^2}$ convergent (séries de Riemann). Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{d)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{6}.$$

Finalement on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} - \frac{\pi^4}{6} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour calculer la dernière série on va utiliser la question c), i.e. le théorème de Dirichlet, en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Si $n = 2p$ est pair on a alors $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$ et $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$ tandis que si $n = 2k+1$ est impair on a $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$. On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{\pi \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} &=& \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \iff \quad & \frac{\pi^2}{3} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^k}{2k+1} &=& \frac{\pi^2}{16} \\ \iff \quad & \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} - \frac{\pi^2}{16} &=& \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ \iff \quad & \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{\pi^2}{12}\right) - \frac{\pi^2}{16} &=& \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ \iff \quad & \frac{\pi}{4} &=& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Exercice 2. *Etant donné $a \in]0,1[\cup]1,2[$ on considère la fonction définie par $f_a(z) = \dfrac{z}{a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$.*

Partie I.

a) i) *Justifier que f_a est méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

Quelque soit a, les fonctions $g(z) = z$ et $h_a(z) = a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. f est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) *Déterminer les pôles de f_a en précisant leur ordre.*

L'ensemble des pôles de f_a est inclus dans l'ensemble des zéros de son dénominateur h_a. On commence par déterminer où h_a s'annule. On a

$$h_a(z) = 0 \iff a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \iff -\mathrm{i}z = \ln(a) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff z = \mathrm{i}\ln(a) - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les zéros de h_a sont donc les $z_k = \mathrm{i}\ln(a) - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie alors que $h_a'(z_k) = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}z_k} = \mathrm{i}a \neq 0$ pour tout k et que $g(z_k) = \mathrm{i}\ln(a) - 2k\pi \neq 0$ pour tout k car $\ln(a) \neq 0$ ($a \neq 1$). Les z_k sont donc tous des pôles simples de f_a.
Conclusion : les pôles de f_a sont les $z_k = \mathrm{i}\ln(a) - 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et ils sont tous simples.

iii) *Calculer le résidu de f_a en chacun de ses pôles.*

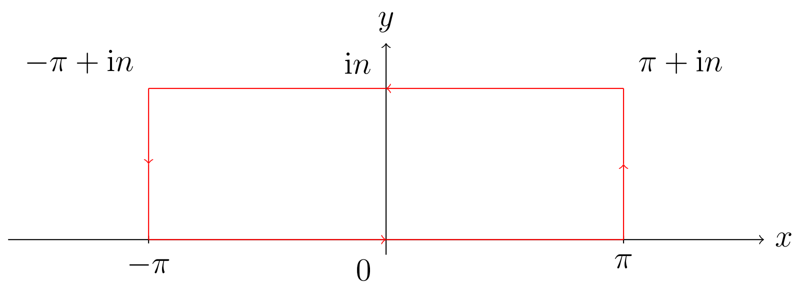
Comme les pôles sont tous des zéros d'ordre 1 du dénominateur h_a de f_a on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Res}(f_a, z_k) = \frac{g(z_k)}{h_a'(z_k)} = \frac{\mathrm{i}\ln(a) - 2k\pi}{\mathrm{i}a} = \frac{\ln(a)}{a} + \mathrm{i}\frac{2k\pi}{a}.$$

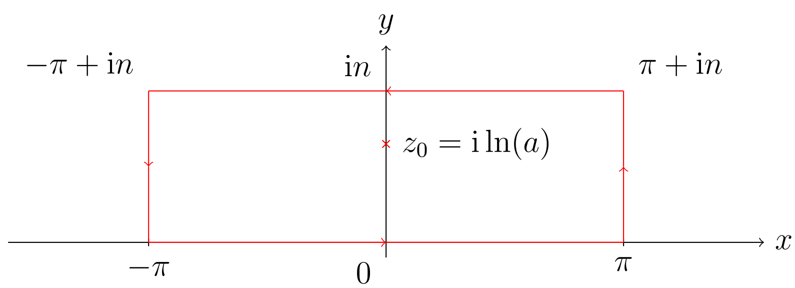
b) *Si $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le lacet γ_n donné par le rectangle de sommets $-\pi$, π, $\pi + \mathrm{i}n$, $-\pi + \mathrm{i}n$ et parcouru une fois dans le sens direct.*

i) *Représenter le lacet γ_n. On placera aussi sur le dessin le(s) pôle(s) éventuel(s) de f_a qui sont à l'intérieur de γ_n. On fera 2 dessins, un dans le cas $a \in]0, 1[$ et un dans le cas $a \in]1, 2[$.*

$z \in \mathbb{C}$ est à l'intérieur de γ_n si et seulement si $-\pi < \mathrm{Re}(z) < \pi$ et $0 < \mathrm{Im}(z) < n$. Comme $\mathrm{Re}(z_k) = -2k\pi$ on en déduit que seul $z_0 = \mathrm{i}\ln(a)$ peut être à l'intérieur de γ_n. Il l'est si et seulement si $0 < \ln(a) < n$. Donc si $a < 1$ on a $\mathrm{Im}(z_0) = \ln(a) < 0$ et il n'y a pas de pôle de f_a à l'intérieur de γ_n, tandis que si $1 < a < 2$ on a $0 < \ln(a) < \ln(2) < 1 \leq n$ et il y a donc un unique pôle à l'intérieur de γ_n, c'est $z_0 = \mathrm{i}\ln(a)$.



Cas $0 < a < 1$



Cas $1 < a < 2$

ii) *Justifier que $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Le résultat peut a priori dépendre de a et/ou de n.*

La fonction f_a est continue sur γ_n car elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et aucun pôle n'est sur γ_n. L'intégrale est donc bien définie. Comme f_a est méromorphe sur l'ouvert étoilé $\Omega = \mathbb{C}$ on peut appliquer le théorème des résidus pour calculer l'intégrale. On a ainsi

$$\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Res}(f, z_k) \times \mathrm{Ind}(\gamma_n, z_k).$$

- Si $0 < a < 1$ il n'y a aucun pôle à l'intérieur de γ_n, i.e. $\mathrm{Ind}(\gamma_n, z_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et donc $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

- Si par contre $1 < a < 2$ il y a un unique pôle à l'intérieur de γ_n et donc $\mathrm{Ind}(\gamma_n, z_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ tandis que $\mathrm{Ind}(\gamma_n, z_0) = 1$. On trouve donc, en utilisant a)iii), $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \frac{\ln(a)}{a}$.

Partie II. *Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'intégrale* $I(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

a) *Montrer que* $I(a)$ *est bien définie. On pourra commencer par vérifier que* $1 + a^2 - 2a\cos(t) = \left(a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\left(a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$.

On vérifie facilement que

$$\left(a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\left(a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \;=\; a^2 - a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) + 1 \;=\; 1 + a^2 - 2a\cos(t).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right| = 1$ tandis que $|a| \neq 1$ donc $a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ et $a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ sont non-nuls. Ainsi $1 + a^2 - 2a\cos(t)$ ne s'annule pas. La fonction $\varphi(t) = \dfrac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}$ est donc continue sur $[0, \pi]$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) et donc $I(a)$ est bien définie.

b) *Donner un paramétrage de chacun des 4 segments* $[-\pi, \pi]$, $[\pi, \pi + \mathrm{i}n]$, $[-\pi + \mathrm{i}n, \pi + \mathrm{i}n]$ *et* $[-\pi, -\pi + \mathrm{i}n]$.

On paramètre

- $[-\pi, \pi]$ par $\gamma^{(1)}(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$,
- $[\pi, \pi + \mathrm{i}n]$ par $\gamma^{(2)}(t) = \pi + \mathrm{i}t$ sur $[0, n]$,
- $[-\pi + \mathrm{i}n, \pi + \mathrm{i}n]$ par $\gamma^{(3)}(t) = t + \mathrm{i}n$ sur $[-\pi, \pi]$,
- $[-\pi, -\pi + \mathrm{i}n]$ par $\gamma^{(4)}(t) = -\pi + \mathrm{i}t$ sur $[0, n]$.

c) *Montrer que* $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}I(a)$. *Indication : parité.*

En utilisant le paramétrage de $[-\pi, \pi]$ donné au b) on a

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\left(a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}{\left(a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\left(a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\left(a - \cos(t) - \mathrm{i}\sin(t)\right)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\left(a - \cos(t)\right)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t\left(a - \cos(t)\right)}{1+a^2-2a\cos(t)}$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\left(a - \cos(t)\right)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 0$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}$ est paire donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 2I(a)$. Finalement on obtient

$$\int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\left(a - \cos(t)\right)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \;=\; -2\mathrm{i}I(a).$$

d) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[\pi+\mathrm{i}n, -\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

En utilisant le paramétrage de $[-\pi+\mathrm{i}n, \pi+\mathrm{i}n]$ donné au b) on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t+\mathrm{i}n}{a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+\mathrm{i}n)}}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t+\mathrm{i}n}{a-\mathrm{e}^{n-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t+\mathrm{i}n|}{|a-\mathrm{e}^{n-\mathrm{i}t}|}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|+n}{|\mathrm{e}^{n-\mathrm{i}t}|-a}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi+n}{\mathrm{e}^{n}-a}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\frac{\pi+n}{\mathrm{e}^{n}-a},
\end{aligned}$$

où on a aussi utilisé l'inégalité triangulaire inversée et le fait que $a < 2 < |e^{n-\mathrm{i}t}|$ à la 4-ème ligne. Comme $\lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\pi+n}{\mathrm{e}^{n}-a} = 0$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

e) i) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{a+\mathrm{e}^t} = 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant les paramétrages de $[\pi, \pi+\mathrm{i}n]$ et $[-\pi, -\pi+\mathrm{i}n]$ donnés au b) on a

$$\begin{aligned}
\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z - \int_{[-\pi,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^n \frac{\pi+\mathrm{i}t}{a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i}t)}}\times\mathrm{i}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{-\pi+\mathrm{i}t}{a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\pi+\mathrm{i}t)}}\times\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{i}\int_0^n \frac{\pi+\mathrm{i}t}{a+\mathrm{e}^t} - \frac{-\pi+\mathrm{i}t}{a+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{a+\mathrm{e}^t},
\end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité. Enfin, on a

$$2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{a+\mathrm{e}^t} = 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^t(a\mathrm{e}^{-t}+1)}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

ii) *Calculer $2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Comme $a > 0$ on a $1 + a\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc

$$2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\int_0^n \frac{-a\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\left[\ln(1+a\mathrm{e}^{-t})\right]_0^n = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\left(\ln(1+a\mathrm{e}^{-n}) - \ln(1+a)\right)$$

D'après i) on a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right) &= \lim_{n\to\infty} -\frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\left(\ln(1+a\mathrm{e}^{-n}) - \ln(1+a)\right) \\
&= \frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\ln(1+a).
\end{aligned}$$

f) *Calculer $I(a)$ en fonction des valeurs de a.*

En utilisant la relation de Chasles, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -2\mathrm{i}I(a) + \int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \left(\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right). \qquad (*)\end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$ le deuxième terme du membre de droite tend vers 0 d'après d) tandis que ce qui est dans la parenthèse tend vers $\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{a}\ln(1+a)$ d'après e). Enfin, en utilisant la question b)ii) de la partie I on trouve la valeur de $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z$. Il y a donc deux cas :

- si $0 < a < 1$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$ et donc, en prenant la limite $n \to +\infty$ dans $(*)$,

$$0 = -2\mathrm{i}I(a) + \frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\ln(1+a) \quad\Longleftrightarrow\quad I(a) = \pi\frac{\ln(1+a)}{a},$$

- si $1 < a < 2$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\frac{\ln(a)}{a}$ et donc de même on obtient

$$2\mathrm{i}\pi\frac{\ln(a)}{a} = -2\mathrm{i}I(a) + \frac{2\mathrm{i}\pi}{a}\ln(1+a) \quad\Longleftrightarrow\quad I(a) = \pi\frac{\ln(1+a)}{a} - \pi\frac{\ln(a)}{a} = \pi\frac{\ln(1+a)-\ln(a)}{a}.$$

<u>Conclusion</u> : si $0 < a < 1$ on a $I(a) = \pi\dfrac{\ln(1+a)}{a}$ et si $1 < a < 2$ on a $I(a) = \pi\dfrac{\ln(1+a)-\ln(a)}{a}$.

Exercice 3. *Soit $\Omega = D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|f(z)| \leq 1$ et que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.*

a) *Soit $g(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$.*

i) *Vérifiez que g est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.*

La fonction g est le quotient de 2 fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et son dénominateur ne s'annule qu'en $z = 2$. Donc g est holomorphe, et donc continue, sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Comme $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathbb{C} \setminus \{2\}$ on en déduit que g est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

ii) *Montrer que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|g(z)| \leq 1$ et que de plus $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$.*

Pour tout $z \neq 2$ on a

$$|g(z)|^2 = \frac{\left|z - \frac{1}{2}\right|^2}{\left|1 - \frac{z}{2}\right|^2} = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{\bar{z}}{2}\right)} = \frac{|z|^2 - \mathrm{Re}(z) + \frac{1}{4}}{1 - \mathrm{Re}(z) + \frac{|z|^2}{4}}.$$

On a donc

$$|g(z)| \leq 1 \iff |g(z)|^2 \leq 1 \overset{1-\mathrm{Re}(z)+\frac{|z|^2}{4}>0}{\iff} |z|^2 - \mathrm{Re}(z) + \frac{1}{4} \leq 1 - \mathrm{Re}(z) + \frac{|z|^2}{4} \iff |z|^2 \leq 1.$$

On a donc bien $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$. De plus si $|z| = 1$ on a alors $|g(z)|^2 = \dfrac{1 - \mathrm{Re}(z) + \frac{1}{4}}{1 - \mathrm{Re}(z) + \frac{1}{4}} = 1$ et donc $|g(z)| = 1$.

b) *Soit* $h = \dfrac{f}{g}$.

i) *Vérifiez que h est méromorphe sur Ω et qu'elle a une unique singularité qu'on précisera.*
h est le quotient de 2 fonctions holomorphes sur Ω. Elle est donc méromorphe. De plus ses singularités sont les zéros de son dénominateur. Elle a donc une unique singularité en $z_0 = \dfrac{1}{2}$.

ii) *Montrez que h se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.*
On va montrer que z_0 est une singularité artificielle ce qui prouvera, par définition d'une singularité artificielle, que h peut bien être prolongée en fonction holomorphe sur Ω. h sera donc continue au moins sur Ω. De plus f et g sont continues sur $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ et g ne s'y annule pas donc h sera aussi continue sur $\partial\Omega$ et donc sur $\overline{\Omega}$.

Il reste donc à vérifier que z_0 est une singularité artificielle de h. On vérifie que $g'(z_0) = \frac{4}{3} \neq 0$ donc z_0 est un zéro d'ordre 1 du dénominateur g. Comme c'est aussi un zéro du numérateur f, par hypothèse, on en déduit que z_0 est une singularité artificielle de $h = \dfrac{f}{g}$.

c) *Montrer que pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| \leq |g(z)|$.*
La fonction h, une fois prolongée, est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. De plus Ω est bornée. On peut donc appliquer le principe du maximum. Pour tout $z \in \Omega$ on a $|h(z)| \leq \max\limits_{z \in \partial\Omega} |h(z)|$. Or $z \in \partial\Omega$ si et seulement si $|z| = 1$ et pour tout z tel que $|z| = 1$ on a $|f(z)| \leq 1 = |g(z)|$, i.e. $|h(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1$. Ainsi, pour tout $z \in \Omega$ on a $|h(z)| \leq 1$. Si $z \in \Omega$, $z \neq z_0$, on a donc

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1 \quad \iff \quad |f(z)| \leq |g(z)|,$$

tandis que $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Pour tout $z \in \Omega$ on a bien $|f(z)| \leq |g(z)|$.

d) *On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ holomorphes sur Ω, continues sur $\overline{\Omega}$ et telles que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. Déterminer $\sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \left| f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right|$.*

Si $f \in \mathcal{A}$, comme $\dfrac{\mathrm{i}}{2} \in \Omega$ d'après la question précédente on a $\left| f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| \leq \left| g\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| = \sqrt{\dfrac{8}{17}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$. Donc $\sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \left| f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| \leq \sqrt{\dfrac{8}{17}}$. Enfin d'après a)ii) la fonction g est dans $\mathcal{A}$ donc

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \left| f\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| \;\geq\; \left| g\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| \;=\; \sqrt{\frac{8}{17}}.$$

Conclusion : $\sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \left| f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| = \sqrt{\dfrac{8}{17}}$.

<u>Remarque</u> : le sup est donc atteint pour $f = g$. On pourrait préciser toutes les fonctions f pour lesquelles ce sup est atteint. En effet, si $f \in \mathcal{A}$ vérifie $\left| f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| = \sqrt{\dfrac{8}{17}}$ alors la fonction $h = \dfrac{f}{g}$ considérée dans les questions précédentes est telle que $\left| h\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) \right| = 1 = \max\limits_{z \in \partial\Omega} |h(z)|$ alors que $\dfrac{\mathrm{i}}{2} \in \Omega$. Le principe du maximum permet d'affirmer que h est constante. De plus cette constante est nécessairement de module 1. On en déduit que nécessairement $f = \lambda g$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.