L3 Mathématiques
15 décembre 2020

CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Analyse complexe: contrôle final

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Total des points sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1 (7pts). Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{x^2}{4}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

a) Montrer que f est C^1 par morceaux et tracer son graphe sur $[-4\pi, 4\pi]$.

b) Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{et, pour tout } n \geq 1,\ a_n(f) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{\pi}{n}.$$

c) Justifier que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout $x \in [0, 2\pi]$ la valeur de sa somme.

d) Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

e) Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Indication: on pourra être amené à utiliser les résultats obtenus à la question précédente.

Exercice 2 (14pts). Etant donné $a \in]0, 1[\cup]1, 2[$ on considère la fonction définie par

$$f_a(z) = \frac{z}{a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}.$$

Partie I. (6pts)

a) i) Justifier que f_a est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) Déterminer les pôles de f_a en précisant leur ordre.

iii) Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le lacet γ_n donné par le rectangle de sommets $-\pi$, π, $\pi + \mathrm{i}n$, $-\pi + \mathrm{i}n$ et parcouru une fois dans le sens direct.

i) Représenter le lacet γ_n. On placera aussi sur le dessin le(s) pôle(s) éventuel(s) de f_a qui sont à l'intérieur de γ_n. On fera 2 dessins, un dans le cas $a \in]0, 1[$ et un dans le cas $a \in]1, 2[$.

TSVP

ii) Justifier que $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Le résultat peut a priori dépendre de a et/ou de n.

Partie II. (8pts) Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I(a)$ est bien définie. On pourra commencer par vérifier que $1+a^2-2a\cos(t) = \left(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$.

b) Donner un paramétrage de chacun des 4 segments $[-\pi,\pi]$, $[\pi,\pi+\mathrm{i}n]$, $[-\pi+\mathrm{i}n,\pi+\mathrm{i}n]$ et $[-\pi,-\pi+\mathrm{i}n]$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}I(a)$. Indication: parité.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

e) i) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{a+\mathrm{e}^t} \;=\; 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

ii) Calculer $2\mathrm{i}\pi\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

f) Calculer $I(a)$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 3 (9pts). Soit $\Omega = D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que pour tout $z\in\overline{\Omega}$ on a $|f(z)|\le 1$ et que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

a) Soit $g(z) = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}$.

i) Vérifiez que g est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

ii) Montrer que pour tout $z\in\overline{\Omega}$ on a $|g(z)|\le 1$ et que de plus $|g(z)|=1$ si $|z|=1$.

b) Soit $h=\dfrac{f}{g}$.

i) Vérifiez que h est méromorphe sur Ω et qu'elle a une unique singularité que l'on précisera.

ii) Montrez que h se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

c) Montrer que pour tout $z\in\Omega$ on a $|f(z)|\le|g(z)|$.

d) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ holomorphes sur Ω, continues sur $\overline{\Omega}$ et telles que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ et $|f(z)|\le 1$ pour tout $z\in\Omega$. Déterminer $\displaystyle\sup_{f\in\mathcal{A}}\left|f\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|$.