Corrigé de l'examen du 20/12/2019 - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Exercice I : 2) Sur $]0,\pi[$, $f(x)=e^{-x}$ est C^1 ; de même, sur $]-\pi,0[$, $f(x)=e^{x}$ est C^1. Par 2π-périodicité, f est donc C^1 sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. De plus, par 2π-périodicité, on a $\lim\limits_{x\nearrow-\pi} f(x)=f(-\pi)=0=f(\pi)=\lim\limits_{x\searrow\pi} f(x)$ donc f est continue en $x=\pm\pi$. Donc par 2π-périodicité, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $x\mapsto|x|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, f est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. De plus, f est dérivable à droite et à gauche en chaque point de $\pi\mathbb{Z}$ avec pour $k\in\mathbb{Z}$, $f'_-(2k\pi)=1$, $f'_+(2k\pi)=-1$ et $f'_-((2k+1)\pi)=-1$, $f'_+((2k+1)\pi)=1$ donc f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et les points de discontinuité de f' sont ceux de l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$.

3) On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \Big(\frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in}\Big)' dx = \Big[\frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in}\Big]_0^\pi = \frac{e^{(-1+in)\pi}-1}{-1+in} \\ &= \frac{(e^{-\pi}(-1)^n-1)(1+in)}{(-1+in)(1+in)} = \frac{(1-(-1)^n e^{-\pi})(1+in)}{n^2+1}. \end{aligned}$$

4) **(a)** f est paire donc $b_n=0$ pour $n\geq 1$.

(b) f est paire donc pour tout $n\geq 0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}\cos(nx)dx = Re\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}e^{inx}dx\Big)$$

d'où $a_n=\dfrac{2}{\pi}Re(I_n)=\dfrac{2}{\pi}\Big(\dfrac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{n^2+1}\Big)$.

5) f étant 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad f(x)=S(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$$

d'où, en utilisant $b_n=0$ et l' expression de a_n ci-dessus,

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad e^{-|x|}=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n e^{-\pi})\cos(nx)}{n^2+1}.$$

6) Pour $x=\frac{\pi}{2}$, en utilisant : $\cos(n\frac{\pi}{2})=0$ pour n impair et $\cos(n\frac{\pi}{2})=(-1)^n$ pour n pair, on obtient

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad e^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^{2k}e^{-\pi})\cos(2k\frac{\pi}{2})}{(2k)^2+1}$$

d'où, en posant $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+1}$,

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+1} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}(1+2A).$$

On en déduit

$$A = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-\pi}} - 1\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{-\pi} - 1}{1-e^{-\pi}}\Big).$$

Exercice II : **1)** Il s'agit des équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) On a $\frac{\partial Q}{\partial x} = a\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y} = a\frac{\partial P}{\partial y}$. En utilisant les relations de Cauchy-Riemann, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = a\frac{\partial P}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -a\frac{\partial P}{\partial x}$$

donc $\frac{\partial P}{\partial x} = -a^2\frac{\partial P}{\partial x}$ et on en déduit que $\Big(1+a^2\Big)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique que $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ car $1+a^2 > 0$. On a alors $\frac{\partial P}{\partial y} = -a\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ donc $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, ce qui montre que P est constant sur $\mathbb{R}^2$. Donc $Q = aP + b$ est également constant sur $\mathbb{R}^2$ (on peut aussi utiliser les relations de Cauchy-Riemann pour montrer que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$). On en déduit que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice III : **1)** a) h étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est analytique sur $\mathbb{C}$ et en particulier développable en série entière (DSE) autour de α donc il existe $r > 0$ et une suite $(b_n)_{n\in N}$ tels que $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ si $|z-\alpha| < r$. Ce DSE est le développement de Taylor de h en α, donc $b_n = h^{(n)}(\alpha)/n!$ ce qui donne $b_0 = h(\alpha) = 0$ et $b_1 = h'(\alpha) \neq 0$. On a donc

$$\forall z \in B(\alpha,r),\ \ h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n = (z-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-1} = (z-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-\alpha)^k$$

d'où

$$\forall z \in B(\alpha,r)\setminus\{\alpha\},\ \ \phi(z) = \frac{h(z)}{z-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-\alpha)^k$$

et cette égalité reste vraie si $z = \alpha$ car $\phi(\alpha) = h'(\alpha) = b_1$. Ceci montre que ϕ est développable en série entière autour de α, elle est donc holomorphe en α. De plus, si $z_0 \neq \alpha$, $\phi(z) = \frac{h(z)}{z-\alpha}$ est holomorphe comme quotient de 2 fonctions holomorphes avec $z_0 - \alpha \neq 0$. On en déduit que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) Comme ϕ est holomorphe, elle est continue sur $\mathbb{C}$ et $\phi(\alpha) = h'(\alpha) \neq 0$. Donc il existe $r > 0$ tel que $\phi(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\alpha,r)$. En écrivant $h(z) = (z-\alpha)\phi(z)$, on a

$$\forall z \in B(\alpha,r)\setminus\{\alpha\},\ \ f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{(z-\alpha)\phi(z)} = \frac{\tilde{f}(z)}{z-\alpha},$$

où l'on a posé $\tilde{f}(z) = \frac{g(z)}{\phi(z)}$. La fonction $\tilde{f}$ est holomorphe sur $D(\alpha, r)$ comme quotient des 2 fonctions holomorphes g et ϕ avec $\phi \neq 0$ sur ce disque et $\tilde{f}(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{\phi(\alpha)} = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \neq 0$. Donc f a un pôle simple en α et le résidu de f en α vaut $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \tilde{f}(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$.

2) a) On a $(z^2 + a^2)(z^2 + b^2) = 0$ si et seulement si $z^2 + a^2 = 0$ ou $z^2 + b^2 = 0$, c'est à dire si et seulement si $z = \pm ia$ ou $z = \pm ib$. Donc sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm ia, \pm ib\}$, la fonction f est holomorphe comme quotient de 2 fonctions holomorphes avec $(z^2 + a^2)(z^2 + b^2) \neq 0$ pour $z \in \Omega$. De plus, $z^2+a^2 = (z-ia)(z+ia)$ donc $(z^2+a^2)(z^2+b^2) = (z-ia)\phi(z)$ avec $\phi(z) = (z+ia)(z^2+b^2)$ fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\phi(ia) \neq 0$ (car $a \neq b$). Donc $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z - ia)\phi(z)}$ a un pôle simple en ia. On montre de même que $-ia$ et $\pm ib$ sont des pôles simples de f.

b) En posant $g(z) = e^{iz}$ et $h(z) = (z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$, les fonctions g et h sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. De plus, $h'(z) = 2z(2z^2 + a^2 + b^2)$, d'où $h'(ia) = 2ia(b^2 - a^2)$ et $h'(ib) = 2ib(a^2 - b^2) = -ib(b^2 - a^2)$. Donc pour $\alpha = ia, ib$, on a $h(\alpha) = 0$ avec $h'(\alpha) \neq 0$ car $0 < a < b$. On peut donc appliquer le résultat de la question **1)**, d'o 'u $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$, soit

$$\mathrm{Res}\,(f, ia) = \frac{e^{-a}}{2ia(b^2 - a^2)}, \quad \mathrm{Res}\,(f, ib) = -\frac{e^{-b}}{2ib(b^2 - a^2)}.$$

3) (b) Pour $R > b$, les pôles de f à l'intérieur du lacet γ_R sont ia et ib, qui sont d'indice 1. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f, ia) + \mathrm{Res}\,(f, ib)) = 2\pi i(\frac{e^{-a}}{2ia(b^2 - a^2)} - \frac{e^{-b}}{2ib(b^2 - a^2)}) \\
&= \frac{\pi}{b^2 - a^2}(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}).
\end{aligned}$$

(c) Si $z \in C_R^+$, $z = x+iy$ avec $|z|^2 = x^2+y^2 = R^2$ et $Im(z) = y > 0$. Donc $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} < 1$

$$\text{d'où pour } z \in C_R^+, \ \ |f(z)| \leq \frac{1}{|(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)|} \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}$$

car $|z^2 + a^2| \geq |z^2| - a^2 = R^2 - a^2 > 0$ et $|z^2 + b^2| \geq |z^2| - b^2 = R^2 - b^2 > 0$.

On a $\int_{C_R^+} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{-i\theta}d\theta$, on en déduit donc

$$\Big| \int_{C_R^+} f(z)dz \Big| \leq \int_0^\pi \Big| f(Re^{i\theta} \Big| Rd\theta \leq \frac{\pi R}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)},$$

puis que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0$.

(d) On a $\displaystyle\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[-R,R]}(x)dx$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ |f(x)1_{[-R,R]}(x)| \leq |f(x)| \leq \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} < +\infty$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

(e) On a

$$\forall R > b,\ \ \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz$$

d'où en faisant tendre R vers $+\infty$ et en utilisant le résultat de 3) (b), (c) et (d),

$$\frac{\pi}{b^2-a^2}(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

On a $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \dfrac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + i\dfrac{\sin(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = Re(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx) = \frac{\pi}{b^2-a^2}(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}).$$

(On peut aussi remarquer que $Im(f)$ est impaire donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Im(f)(x)dx = 0$ d'où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.)

Exercice IV : **1) (a)** $f(z)$ n'est pas définie ssi $(z-2)^2(z-1) = 0$ ssi $z = 2$ ou $z = 1$. Donc $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$. On vérifie que pour tout $z \in \Omega$,

$$\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} = \frac{(z-1)-(z-1)(z-2)+(z-2)^2}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{1}{(z-2)^2(z-1)} = f(z)$$

(b) f a 2 singularités : $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$.

Autour de $z_1 = 1$, $z \mapsto \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}$ est analytique donc $(\star)$ donne le développement de Laurent de f en $z_1 = 1$, ayant comme partie singulière le terme $1/(z-1)$ donc $z_1 = 1$ est un pôle simple de f. De même, la partie singulière du développement de Laurent de f en $z_2 = 2$ est $z \mapsto \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}$ et $1/(z-1)$ est la partie holomorphe au voisinage de 1. $z_2 = 2$ est donc un pôle d'ordre 2 de f.

2) Pour $r = \frac{1}{2}$: f est holomorphe sur $B(0,\frac{3}{4})$, ouvert convexe qui contient le lacet $C_{1/2}$ donc $\displaystyle\int_{C_{1/2}} f(z)dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy.

Par ailleurs, d'après $(*)$, $\text{Res}\,(f,1)=1$ et $\text{Res}\,(f,2)=-1$. D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{C_{3/2}} f(z)dz = 2\pi i\text{Res}\,(f,1) = 2\pi i \text{ et } \int_{C_3} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}\,(f,1)+\text{Res}\,(f,2)) = 0.$$

3) **(a)** On a $\dfrac{1}{z-1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z|<1$ et

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2(1-z/2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ pour } |z|<2.$$

(b) La série entière ci-dessus étant absolument convergente sur $D(0,2)$, on peut dériver terme à terme. On en déduit que pour $|z|<2$,

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \Big(-\frac{1}{z-2}\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+2}}z^n.$$

(c) On en déduit à l'aide de $(*)$ que pour $|z|<1$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+2}}z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{n+1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+1}}-1\Big)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}}\Big)z^n.$$

(d) Le DSE de f est son développement en série de Taylor en 0 donc $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$ est le coefficient de z^3 d'où

$$f^{(3)}(0) = 3!\Big(\frac{6-2^5}{2^5}\Big) = 3\Big(\frac{3-2^4}{2^3}\Big) = \frac{-39}{8}.$$

4) On a pour $|z|>1$,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\times\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$$

et en utilisant les questions 3) (a) et 3) (b), on a pour $|z|<2$,

$$\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{n+3}{2^{n+2}}\Big)z^n.$$

Le développement en série de Laurent de f pour $z\in A$ est donc donné par

$$\forall z\in A,\ \ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{n+3}{2^{n+2}}\Big)z^n.$$