Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5 - Session 1 - Vendredi 20/12/2019

Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Durée : 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice I : Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = e^{-|x|}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Justifier rapidement que f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et préciser les points de discontinuité de f'.

3) Pour $n \geq 0$, soit $I_n = \int_0^\pi e^{(-1+in)x} dx$. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \ \ I_n = \frac{(1 - (-1)^n e^{-\pi})(1 + in)}{n^2 + 1}.$$

4) On note a_n le coefficient de $\cos(nx)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(nx)$ dans la série de Fourier $S(f)$ de f.

(a) Que vaut b_n pour $n \geq 0$?

(b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_n = \frac{2}{\pi} Re(I_n)$ et en déduire l'expression de a_n.

5) Justifier soigneusement l'égalité suivante :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \ \ e^{-|x|} = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^n e^{-\pi}) \cos(nx)}{n^2 + 1}.$$

6) En appliquant cette égalité à $x = \frac{\pi}{2}$, en déduire la valeur de $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 + 1}$.

Exercice II : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On définit les deux fonctions $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ f(z) = P(x, y) \ + \ i\, Q(x, y) \text{ avec } z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Ecrire les relations qui relient $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

2) On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $Q(x, y) = aP(x, y) + b$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$. En déduire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \left(1 + a^2\right) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 0$$

En déduire que $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, puis que f est constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice III : **1)** Soient $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ et $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $h(\alpha) = 0$ avec $h'(\alpha) \neq 0$ et $g(\alpha) \neq 0$.

a) On définit la fonction $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{h(z)}{z-\alpha} & \text{si } z \neq \alpha \\ h'(\alpha) & \text{si } z = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que ϕ est développable en série entière autour de α. En déduire que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) Pour tout $z \in D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$, on pose $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. A l'aide de la fonction ϕ de la question a), montrer que f a un pôle simple en α et que le résidu de f en α vaut $\operatorname{Res}(f, \alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$.

2) Soient $0 < a < b$ fixés. On définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$.

a) Montrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm ia, \pm ib\}$. Quelle est la nature des singularités de f en $\pm ia$ et $\pm ib$?

b) A l'aide du résultat de la question **1)**, calculer $\operatorname{Res}(f, ia)$ et $\operatorname{Res}(f, ib)$.

3) Pour $R > b$, soit C_R^+ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R défini par

$$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$$

et soit γ_R le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de C_R^+ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct.

(a) Représenter sur une figure γ_R pour un $R > b$ et les points $\pm ia$ et $\pm ib$.

(b) A l'aide du théorème des résidus, montrer que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{b^2 - a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).$$

(c) A l'aide d'une majoration de $\max_{z \in C_R^+} |f(z)|$ pour $R > b$, montrer que $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0$.

(d) Montrer que $\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

(e) En déduire la valeur de l'intégrale réelle $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$.

.

Exercice IV : Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$

1) **(a)** Quel est le domaine de définition Ω de f ? Vérifier que l'on a

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} \quad (*)$$

(b) Préciser quelles sont les singularités de f, leur nature et leur ordre.

2) On note $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ le lacet paramétrant le cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Pour $r \neq 1, 2$, on note $I_r = \int_{C_r} f(z)dz$. Donner la valeur de I_r pour $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{2}$ et $r = 3$.

3) **(a)** Rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{z-1}$ pour $|z| < 1$ et en déduire celui de de $\dfrac{1}{z-2}$ pour $|z| < 2$.

(b) Montrer que

$$\frac{1}{(z-2)^2} = (-\frac{1}{z-2})' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+2}} z^n \text{ pour } |z| < 2.$$

(c) En déduire que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}}\right) z^n \quad \text{pour } |z| < 1.$$

(d) Montrer (avec le minimum de calculs) que $f^{(3)}(0) = \dfrac{-39}{8}$.

4) En écrivant que $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{1}{1-1/z}$ pour $|z| > 1$, donner le développement en série de Laurent de f sur la couronne $A = \{z \in \mathbb{C} \ / 1 < |z| < 2\}$.