CORRIGÉ de l'Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Solution de l'Exercice I :

1) Puisque $f(-\pi) = (-\pi)^2 = \pi^2$, par 2π-périodicité de f on déduit que f vaut π^2 sur tout l'ensemble $(2\mathbb{Z}+1)\pi$. On se réduit ainsi à vérifier la parité de f sur $A = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\pi$. Déjà, sur $]-\pi,\pi[$, $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Or, tout $x \in A$ se décompose d'une façon unique comme $x = 2k\pi + \varepsilon$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon \in]-\pi,\pi[$. Alors par 2π-périodicité de f on a : $f(x) = f(2k\pi+\varepsilon) = f(\varepsilon) = f(-\varepsilon) = f(-2k\pi-\varepsilon) = f(-x)$. Donc f est paire sur A aussi, donc sur $\mathbb{R}$.

2) f est continue sur $]-\pi,\pi[$, donc elle l'est aussi, par 2π-périodicité, sur l'ensemble A désigné ci-dessus. Pour la continuité dans les points de $(2\mathbb{Z}+1)\pi$, toujours par 2π-périodicité, il suffira d'étudier la continuité de f en π. On a vu à 1) que $\pi^2 = f(\pi) = \lim_{x\nearrow\pi} f(x)$ et par 2π-périodicité on a aussi $\lim_{x\searrow\pi} f(x) = \lim_{x\searrow-\pi} f(x) = (-\pi)^2 = \pi^2$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Les points de $(2\mathbb{Z}+1)\pi$ sont ceux où f' n'est pas définie. En effet, sur $]-\pi,\pi[$, $f'(x) = 2x$ et par 2π-périodicité $\lim_{x\searrow\pi} f'(x) = \lim_{x\searrow-\pi} f'(x) = -2\pi$ alors que $\lim_{x\nearrow\pi} f(x) = 2\pi$.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3) (a) La fonction f est paire, donc ses coefficients b_n (en sinus) de la série de Fourier de f sont nuls, et on a : $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2(\sin(nx))'dx = \dots IPP \dots = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Comme par définition $S(f) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$ on obtient donc

$$S(f) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

4) f étant continue et C^1 par morceaux, par le théorème de Dirichlet cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout x réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi,\pi]$, $f(x) = S(f)(x)$ i.e.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

5) Si l'on prend ci-dessus $x = \pi$, on obtient : $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Si l'on fait $x = 0$, on obtient cette fois : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

6) L'identité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue, s'énonce ainsi :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4}+\sum_{n\geq 1}\frac{a_n^2+b_n^2}{2},$$

et elle donne dans le cas présent :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx = \frac{\pi^4}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{16}{n^4} \quad \text{ce qui donne ensuite :} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Solution de l'Exercice II :

1) Il s'agit des équations de Cauchy-Riemann sur $\widetilde{D}$: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Sous les hypothèses : f holomorphe sur D et $Q = P^2$ sur $\widetilde{D}$, on a d'après 1) :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (P^2)}{\partial y} = 2P\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial (P^2)}{\partial x} = -2P\frac{\partial P}{\partial x}$$

qui équivaut au système homogène d'inconnues $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} - 2P\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} + 2P\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Or, le discriminant de ce système vaut $1 + P^2 \geq 1 > 0$ partout sur $\mathbb{R}^2$, donc il s'agit d'un système à solution unique : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ ce qui entraîne que P est nécessairement constante. Or, dans ce cas le équations de Cauchy-Riemann impliquent aussi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ donc Q est constante aussi. On en déduit que les seules fonctions holomorphes f sur D pour lesquelles $\mathfrak{Im}\, f = (\mathfrak{Re}\, f)^2$ sont les fonctions constantes.

Solution de l'Exercice III :

1) g étant holomorphe sur Ω elle est analytique sur Ω, i.e. développable en série entière (abrégé : DSE) en chaque point z_0 de l'ouvert Ω. Son DSE converge pour tout $z \in D(z_0, R)$ dès lors que $0 < R \leq \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ et a la forme : $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Celui-ci est en fait le développement de Taylor de g en z_0, dont les coefficients sont $a_n = g^{(n)}(z_0)/n!$.

2) f_k sont des rapports entre les fonctions (holomorphes sur Ω) g et $z \mapsto (z-z_0)^{k+1}$, donc les f_k sont holomorphes partout sur Ω à l'exception des points où elles ne sont pas définies ; dans notre cas, en z_0 seulement.

Concernant la nature de la singularité en z_0, la condition $(a_0, a_1, ..., a_k) \neq (0, 0, ..., 0)$ assure qu'il existe un $0 \leq q \leq k$ qui est le plus petit $j \in \{0, \ldots, k\}$ pour lequel $a_j \neq 0$. En tenant compte de la question précédente, le DSE de g en z_0 sera donc :

$$g(z) = \sum_{n=q}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^q\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+q}(z-z_0)^n$$

qu'on pourra diviser par $(z-z_0)^{k+1}$ pour obtenir le développement en série de Laurent (DSL) de f_k en z_0 (qui converge dans une couronne $\mathcal{C}(z_0;r,R)$), sous la forme :

$$f_k(z)=\left(\sum_{n=0}^{k-q}+\sum_{n=k+1-q}^{\infty}\right)a_{n+q}(z-z_0)^{n-(k+1-q)}=\sum_{n=0}^{k-q}a_{n+q}(z-z_0)^{n-(k+1-q)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k+1}(z-z_0)^n.$$

La première somme du membre de droite est la "partie singulière" du DSL, qui, a priori converge dans le complémentaire dans Ω du disque fermé de centre z_0 et de rayon r, mais dans notre cas, étant une somme finie, elle converge toujours, donc $r=0$ (i.e. elle converge sur $\Omega\setminus\{z_0\}$).
La deuxième somme du membre de droite est la "partie entière" du DSL, qui converge dans tout disque ouvert centré en z_0 et de rayon $0\leq R\leq \operatorname{dist}(z_0,\partial\Omega)$.
Dans la partie singulière du DSL ci-dessus le terme du plus haut degré du polynôme en variable $(z-z_0)^{-1}$ est celui pour lequel $n=0$, à savoir : $a_q(z-z_0)^{q-(k+1)}$, donc z_0 est un singularité d'ordre $p=(k+1)-q$. Or, on avait $0\leq q\leq k$ donc il s'agit bien d'un pôle en z_0, qui sera d'ordre $1\leq p\leq k+1$.
Par définition, le résidu de f_k en z_0 est le coefficient du premier terme de la partie singulière du DSL, donc celui pour lequel $n=k-q$ dans la première somme du membre de droite ci-dessus. Il s'agit donc de $a_{(k-q)+q}=a_k=g^{(k)}(z_0)/k!$.

3) Dans notre cas γ est un lacet parcouru une seule fois en sens direct et à l'intérieur duquel ne se trouve qu'un seul pôle de f_k, à savoir z_0. Le théorème des résidus s'écrit alors :

$$\oint_\gamma f_k(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}(f_k,z_0).$$

Or, d'après la question précédente, $\operatorname{Res}(f_k,z_0)=a_k=g^{(k)}(z_0)/k!$, d'où la formule de Cauchy à l'ordre k.

4) (a) g est rapport de fonctions entières donc elle est holomorphe partout où elle est définie, à savoir sur $\Omega=\mathbb{C}^*$.
En $z_0=2$ elle est holomorphe donc analytique et son disque de convergence est tel que son intersection avec l'ensemble des singularités de g doit être vide. Donc il aura un rayon maximal $R=\operatorname{dist}(z_0,0)=|2-0|=2$.

(b) Sur $\mathbb{C}^*$: $g'(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$. Or, g est développable en série entière dans le disque ouvert $D(2,2)$ ce DSE étant celui de Taylor. Il existe donc une fonction $h:D(2,2)\to\mathbb{C}$, holomorphe sur $D(2,2)$ telle que $\forall z\in D(2,2)$:

$$g(z)=g(2)+\frac{g'(2)}{1!}(z-2)+(z-2)^2h(z)=\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{\mathrm{e}^2}{4}(z-2)+(z-2)^2h(z).$$

Alternativement, on aurait pu développer en $z_0=2$: $z\mapsto \mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{(z-2)}\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2)^n}{n!}$ et $z\mapsto\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(z-2)/2}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2^k}(z-2)^k$ et multiplier ces deux DSE pour obtenir le résultat, mais en procédant ainsi on n'aurait pas obéi à l'injonction "en déduire" de l'énoncé ...

(c) On divise par $(z-2)^2$ la formule ci-dessus (qui donne le DSE de g en 2 sur $D(2,2)$) et on obtient : $\dfrac{g(z)}{(z-2)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2(z-2)^2} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{4(z-2)} + h(z)$ où les premiers deux termes sont la partie singulière du DSL de $g/(\cdot - 2)$ puisque h étant holomorphe, son DSE en $z_0 = 2$ fournira la partie entière du DSL de $g/(\cdot - 2)$.

(d) On remarque qu'en prenant g définie comme auparavant, I devient : $\displaystyle\oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-2)^2}\mathrm{d}z$ qu'on pourra calculer avec la formule de Cauchy à l'ordre $k=1$: $I = 2\pi i g'(2) = \dfrac{i\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

Solution de l'Exercice IV :

1) Les g_α ont le même domaine d'holomorphie que celui de f. En effet, puisque le produit de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe, il suffira de montrer que $z \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Or cette dernière est composée de deux fonctions holomorphes (sur $\mathbb{C}$) : l'exponentielle et $z \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha z}$.

Concernant (A) : pour z quelconque, $|\mathrm{e}^{i\alpha z}| = |\mathrm{e}^{i\alpha x}| \cdot \mathrm{e}^{-\alpha y} = \mathrm{e}^{-\alpha y}$. Si $\alpha > 0$ et $\mathfrak{Im}\, z = y \geq 0$, alors $0 < \mathrm{e}^{-\alpha y} \leq 1$. Donc si f a la propriété (A), alors $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty, \mathfrak{Im}\,(z)\geq 0} |g_\alpha(z)| = 0$ aussi.

Concernant (B) : Lorsque $z = x + iy \in \mathbb{R}$ (donc $y = 0$), $|g_\alpha(x)| = |f(x)|$ et on déduit que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\alpha(x)|dx$ sont convergentes aussi, sachant que celle de $|f|$ l'est par hypothèse.

2) (a) De 1) résulte que pour chaque $\alpha > 0$, les g_α sont holomorphes dans Ω. En choisissant $R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ on s'assure que toutes les singularités isolées de f se trouvent à l'intérieur du contour Γ_R, et la même chose est vraie pour les g_α. En appliquant alors le théorème des résidus aux g_α pour le contour $\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$ on trouve :

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(g_\alpha, a_k) = \int_{\Gamma_R} g_\alpha(z)dz = \left(\int_{\gamma_R} + \int_{C_R}\right) g_\alpha(z)dz.$$

En choisissant pour le chemin $\gamma_R \subset \mathbb{R}$ la paramétrisation $\gamma_R(x) = x$ pour $x \in [-R, R]$ (donc $\gamma_R'(x) = x' = 1$) on déduit : $\displaystyle\int_{\gamma_R} g_\alpha(z)dz = \int_{-R}^{R} g_\alpha(x)dx.$

(b) En choisissant $R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ on s'assure de l'existence d'un voisinage ouvert du demi-cercle C_R sur lequel f est holomorphe, et en particulier, continue (et pareillement pour toutes les g_α). Il résulte que sur le compact C_R de $\mathbb{C}$, f est bornée ; donc pour tout R assez grand, $M(R) = \sup_{z\in C_R} |f(z)|$ est une quantité finie.

En choisissant pour le chemin C_R la paramétrisation $C_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$ (donc $C_R'(t) = Ri\mathrm{e}^{it}$) on déduit :

$$\left|\int_{C_R} g(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^\pi |f(R\mathrm{e}^{it})| e^{-\alpha R \sin t} R\mathrm{d}t \leq RM(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t}\mathrm{d}t.$$

Mais puisque sur $[0, \pi/2]$ on a $\sin(t) = \sin(\pi - t)$, l'intégrale ci-dessus vaut $2\int_0^{\pi/2}$. Ainsi, en utilisant $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ si $t \in [0, \pi/2]$, on obtient la majoration :

$$\left|\int_{C_R} g(z)dz\right| \leq 2RM(R)\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2\alpha Rt/\pi}\mathrm{d}t \leq 2RM(R)\cdot\frac{\pi}{2\alpha R}\cdot[\mathrm{e}^\tau]_{-\alpha R}^0 \leq \frac{\pi}{\alpha}M(R).$$

(c) L'hypothèse (A) sur f assure que $M(R)$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$, donc de (b) on obtient bien le résultat voulu.

(d) On passe à la limite quand $R \to \infty$ dans l'égalité (2.a) de l'énoncé. Sachant que les résidus ne dépendent pas de R la limite n'a aucun effet sur le premier terme du membre de droite de cette identité. Aussi, par (2.c) le deuxième terme du membre de droite de l'identité tend à zéro si $R \to \infty$. Dans le membre de gauche on se retrouve avec $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} g_\alpha(x)\mathrm{d}x$ qui est égale à $I(\alpha)$ ssi g_α est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or, d'après 1) c'est le cas.

3) (a) La fonction J est paire (car le cosinus l'est est l'intégration est une application linéaire), donc on peut se limiter à $\alpha \geq 0$. On a :

$$J(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Sachant que $\cos(\alpha x) = \mathfrak{Re}\, e^{i\alpha x}$ et qu'il s'agit d'une intégrale réelle d'une fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour laquelle on a toujours $\mathfrak{Re}\,(\int\ldots) = \int\mathfrak{Re}\,(\ldots)$, dans le cas $\alpha > 0$ on a "a priori" :

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right).$$

Remarquer que l'intégrale précédente est du type $I(\alpha)$ de la question (1) avec $f(x) = 1/(1+x^2)$. Remarquer par ailleurs que la partie imaginaire de cet $I(\alpha)$ est l'intégrale sur un intervalle symétrique d'une fonction impaire (à cause du sinus) intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathfrak{Im}\, I(\alpha) = 0$, i.e. $\mathfrak{Re}\, I(\alpha) = I(\alpha)$, ce qui prouve, pour le choix de f précisé auparavant, que $J(\alpha) = \frac{1}{2}I(\alpha)$.

Les fonctions $z \mapsto g_\alpha(z) = e^{i\alpha z}f(z)$ où $f(z) = 1/(1+z^2)$ ont le même domaine d'holomorphie que f pour les raisons précisées à 1). Concernant f, ses seules singularités sont les zéros du polynôme $1+z^2$, à savoir $\pm i$ et leur multiplicité étant 1, il suit que $\pm i$ sont des pôles simples de f et donc de g_α pour tout $\alpha > 0$. Or, seulement $i \in H$.

(c) Comme les g_α sont du type F/G un et que i est pôle simple, un résultat connu donne $\mathrm{Res}\left(\frac{F}{G}, i\right) = \frac{F(i)}{G'(i)}$ d'où : $\mathrm{Res}\left(z \mapsto \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i\right) = \frac{e^{-\alpha}}{2i}$.

Alors, d'après (2.d) on déduit dans notre cas : $I(\alpha) = 2\pi i e^{-\alpha}/2i = \pi e^{-\alpha} \in \mathbb{R}$, donc, par (3.b) : $J(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$ si $\alpha > 0$.

Remarquer que d'après (3.a) le cas $\alpha = 0$ convient pour la formule précédente, et par la parité de la fonction J (en α) on a finalement :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos(x\alpha)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$