Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Durée : 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice I : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique, définie pour $x \in [-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1) Tracer rapidement le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Quels sont les points de discontinuité de f' sur $\mathbb{R}$?

3) Pour $n \geq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos(nx)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(nx)$ dans la série de Fourier $S(f)$ de f.

(a) Que vaut b_n ? Calculer a_0.

(b) Donner l'expression de a_n sous forme d'une intégrale sur $[0, \pi]$ puis calculer a_n pour tout $n \geq 1$.

4) Justifier soigneusement l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

5) En appliquant 4) à des valeurs de x bien choisies, en déduire la valeur de $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et de $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6) Ecrire l'identité de Parseval pour f. En déduire la valeur de $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice II : Pour $R > 0$, on note $D = D(0, R)$ le disque *ouvert* dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon R et $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$. A toute fonction $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on associe les deux fonctions $P, Q : \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$, si $z = x + iy \in D$.

1) On suppose f holomorphe sur D. Ecrire les relations qui relient $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sur $\widetilde{D}$.

2) Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur D telles que $Q(x, y) = (P(x, y))^2$ pour tout $(x, y) \in \widetilde{D}$.

Exercice III : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, R)$ est inclus dans Ω. Soit le lacet $\gamma = \partial D(z_0, R)$ (frontière du disque), parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct. On considère une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorphe sur Ω.

1) Justifier le fait que g soit développable en série entière autour de z_0 et écrire ce développement en notant a_n le coefficient d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de a_n en fontion de $g^{(n)}$, la dérivée n-ème de g.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit la fonction $f_k(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ définie pour $z \in \Omega$, $z \neq z_0$. Montrer que f_k est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ et qu'elle a en z_0 un pôle d'ordre $p \leq k + 1$ si $(a_0, a_1, ..., a_k) \neq (0, 0, ..., 0)$. Montrer que le résidu de f_k en z_0 vaut $\mathrm{Res}(f_k, z_0) = a_k$.

3) On note $I_k = \displaystyle\oint_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z$. A l'aide du théorème des résidus, calculer I_k et en déduire la formule de Cauchy à l'ordre $k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\oint_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Tournez la page s.v.p. ↪

4) Application : soit la fonction $g(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$.

(a) Préciser quel est l'ouvert maximal $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lequel la fonction g est holomorphe. En déduire (sans calcul) le rayon R du disque de convergence du développement en série entière autour de $z_0 = 2$.

(b) Calculer $g'(z)$ pour $z \in \Omega$. En déduire qu'il existe une fonction $h : D(2, R) \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $D(2, R)$ telle que $\forall z \in D(2, R), \quad g(z) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}(z-2) + (z-2)^2 h(z)$.

(c) En déduire la partie singulière du développement en série de Laurent de la fonction $\dfrac{g(z)}{(z-2)^2}$.

(d) Soit $I = \displaystyle\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2)^2}\mathrm{d}z$, où $\gamma = \partial D(2, 1)$. Calculer I à l'aide de la formule de Cauchy à l'ordre k obtenue à la question **3)**, pour une valeur de k à préciser.

Exercice IV : Soit $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z > 0\}$ le demi-plan ouvert supérieur de $\mathbb{C}$ et soit $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble fini de points distincts de H. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que la fermeture $\overline{H}$ de H vérifie $\overline{H} \subset \Omega$.
On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\Omega \setminus S$ qui vérifie :

$$\text{(A)} \quad \lim_{|z|\to+\infty, \mathfrak{Im}\, z \geq 0} |f(z)| = 0 \quad \text{et} \quad \text{(B)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ (intégrale réelle convergente).}$$

1) Pour $\alpha > 0$, on pose $g_\alpha(z) = f(z) e^{i\alpha z}$. Montrer que g_α est définie et holomorphe sur $\Omega \setminus S$ et que g_α vérifie également les propriétés (A) et (B) ci-dessus.

2) On se propose de calculer $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x) dx$ pour $\alpha > 0$.
Pour $R > 0$, soit $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \text{ et } \mathfrak{Im}\, z > 0\}$ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R. Notons γ_R le chemin donné par l'intervalle $[-R, R]$. Soit $\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$ le lacet parcouru en sens direct.

(a) Faire un dessin de Γ_R. Montrer que pour tout $R > 0$ suffisamment grand, on a

$$\int_{-R}^{+R} g_\alpha(x)\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g_\alpha, a_j) - \int_{C_R} g_\alpha(z)\mathrm{d}z.$$

(b) En utilisant une paramétrisation de C_R et l'inégalité $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ si $\theta \in [0, \pi/2]$, montrer que :

$$\left| \int_{C_R} g_\alpha(z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{\pi}{\alpha} \sup_{z \in C_R} |f(z)|.$$

(c) En déduire que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g_\alpha(z)\mathrm{d}z = 0$.

(d) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} g_\alpha(x)\mathrm{d}x = I(\alpha)$ et en déduire que $I(\alpha) = 2i\pi \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g_\alpha, a_j)$.

3) Application : soit $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'on peut supposer $\alpha \geq 0$. Donner la valeur de $J(0)$.

(b) Dans la suite, on suppose $\alpha > 0$. Montrer que $J(\alpha) = \frac{1}{2} I(\alpha)$, avec $I(\alpha)$ défini à la question 2), pour une fonction f à préciser, qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et a 2 pôles simples en $-i$ et $+i$.

(c) Déduire de 2)(d) et de ce qui précède que $J(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.