Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5 - Session 1 - Mardi 19/12/2017

Corrigé de l'Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Corrigé de l'Exercice I :

1) $|-x| = x \Rightarrow f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ donc f est paire sur $[-\pi, \pi]$ (et donc sur $\mathbb{R}$).

2) On voit sur le graphique que f est continue sur $\mathbb{R}$. Précisément, la définition de f montre qu'elle est continue sur $]-\pi, \pi[$ (où $f(x) = \pi - |x|$). De plus, par 2π-périodicité, on a $\lim\limits_{x \nearrow -\pi} f(x) = f(-\pi) = 0 = f(\pi) = \lim\limits_{x \searrow \pi} f(x)$ donc f est continue en $x = \pm\pi$. Donc par 2π-périodicité, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $x \mapsto |x|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, f est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. De plus, f est dérivable à droite et à gauche en chaque point de $\pi\mathbb{Z}$ avec pour $k \in \mathbb{Z}$, $f'_-(2k\pi) = 1$, $f'_+(2k\pi) = -1$ et $f'_-((2k+1)\pi) = -1$, $f'_+((2k+1)\pi) = 1$ donc les points de discontinuité de f' sont ceux de l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$.

3) **(a)** f est paire donc $b_n = 0$ pour $n \geq 1$.

(b) f est paire donc pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\Big(\frac{\sin(nx)}{n}\Big)'dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[(\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}dx = 0 + \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big]_0^\pi = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

4) L'expression ci-dessus montre que $a_n = 0$ si n est pair. Si n est impair, $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et on a alors

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

De plus, on a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)dx = \pi.$$

D'après le théorème de Dirichlet, f étant C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$$

5) En prenant $x = 0$, on obtient : $f(0) = \pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)^2}$, d'où : $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \alpha$.

6) On distingue les n pairs ($n = 2k$) et les n impairs ($n = 2k+1$) , d'où (puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente),

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

soit $S = \frac{1}{4}S + \alpha$. Donc $S = \frac{4}{3}\alpha = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'Exercice II : Solution "algébrique" (i.e. calculatoire) :

Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors z s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = -i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \in i\mathbb{R}$$

Remarquons que l'on a le droit d'effectuer ce calcul car $\sin(\theta/2)$ ne s'annule pas (car $|z|=1$).
Réciproquement, supposons que $\dfrac{1+z}{1-z} = ia$, avec a un réel. On a :

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \iff 1+z = ia(1-z) \iff z(1+ia) = -1+ia \iff z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Or, $|z| = \left|\dfrac{-1+ia}{1+ia}\right| = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$, ce qui prouve la réciproque.

Solution "géométrique" : Il s'agit d'un problème de lieu géométrique dans le plan complexe.
Méthode 1 : On pose $\zeta = (1+z)/(1-z)$ avec $z \neq 1$. Ceci équivaut à $z = (\zeta-1)/(\zeta+1)$ avec $\zeta \neq -1$ donc $|z| = 1$ (et $z \neq 1$) équivaut à $|1+\zeta| = |1-\zeta|$ (et $\zeta \neq -1$) i.e. $\zeta \in \mathbb{C}$ est à égale distance des points 1 et de -1 de $\mathbb{C}$ ssi ζ appartient a la médiatrice de -1 et 1, qui est l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$.
Méthode 2 (style TD) : Dessinons sur l'abscisse du plan complexe les points $I_\pm$ d'affixes ± 1 et un point Z (dans le premier cadran, par exemple) d'affixe z. Par la "règle du triangle" pour l'addition des vecteurs on a : $\overrightarrow{ZI_\pm} = \overrightarrow{OI_\pm} - \overrightarrow{OZ}$. Pour l'exploiter, il convient de mettre le membre de droite de l'équivalence sous la forme : $\dfrac{-1-z}{+1-z} \in (-i)\mathbb{R}$, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $-1-z = (-i)\lambda(+1-z)$ ce qui, en termes de vecteurs, s'écrit : $\overrightarrow{ZI_-} = \lambda(-i)\,\overrightarrow{ZI_+}$. Or, on sait que la multiplication d'un vecteur par $\pm i$ a comme effet une rotation du vecteur dans le sens direct/inverse (trigonométrique) d'un angle $\pi/2$. En tout état de cause, ceci montre l'orthogonalité entre $\overrightarrow{ZI_-}$ et $\overrightarrow{ZI_+}$. De surcroît, le cas $\lambda = 0$ équivaut à $Z = I_-$, et les cas $\lambda \gtrless 0$ correspondent à $z \in \mathbb{C}_\pm$ ($Z \in$ demi-plans complexes supérieur/inférieur stricts).
En conclusion, pour tout $Z \neq I_+$ dont l'affixe vérifie le membre de droite de l'équivalence à montrer, l'angle $\widehat{I_+ZI_-} = 90°$ est l'angle droit du triangle rectangle $\triangle\, I_+ZI_-$ dont l'hypoténuse est I_-I_+, i.e. Z est sommet de l'angle droit dans tout triangle rectangle inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Corrigé de l'Exercice III :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x+5$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y+1$

2) **(a)** f étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, (P,Q) vérifient les relations de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(b) On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x+5$.
On intégre par rapport à y et on en déduit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Q(x,y) = (2x+5)y + b(x) = 2xy + 5y + b(x),$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

(c) On a d'après 1), 2)(a) et 2)(b) : $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2y + b'(x) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y-1$.
On en déduit que $b'(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b'(x) = -1$ donc $b(x) = -x + B$ avec $B \in \mathbb{R}$.
On en déduit que $Q(x,y) = 2xy + 5y - x + B$.

3) On a pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y + i(2xy + 5y - x + B)$$

donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2ixy) + 5(x+iy) - i(x+iy) + iB = z^2 + (5-i)z + iB,$$

Corrigé de l'Exercice IV :

1) **(a)** En écrivant $z = x + iy$, on a $|e^{iz}| = |e^{ix}e^{-y}| = e^{-y} \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$. Aussi,
$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff e^{2x}e^{2iy} = -1 = e^{i\pi} \iff x = 0$ et $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Le domaine de définition de f est donc $\Omega = \mathbb{C} \setminus \dfrac{i\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$.

Les fonctions $z \mapsto e^{iz}$ et $z \mapsto e^z + e^{-z}$ étant entières, par les théorèmes généraux, f est holomorphe sur son domaine de définition Ω, qui est un domaine de $\mathbb{C}$ (i.e. un ouvert connexe).

(b) Comme $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} \neq 0$, aucune des singularités de f ne peut être effaçable. Aussi, comme $z \mapsto e^z + e^{-z}$ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) et sa dérivée première $z \mapsto e^z - e^{-z}$ ne s'annule pas sur $\frac{i\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$, les points de cet ensemble sont des zéros simples de $z \mapsto e^z + e^{-z}$. Donc les points de $\frac{i\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$ sont tous des pôles simples de f.

(c) Rappelons que, par définition, α est un zéro isolé de h si c'est un point isolé de l'ensemble des zéros de h, i.e. si, dans un disque de centre α et de rayon suffisamment petit, α est le seul point où h s'annule.

Par ailleurs, on sait que α est un zéro isolé d'ordre n de h si et seulement s'il existe une fonction holomorphe $\widetilde{h}$ définie sur un disque ouvert $D(\alpha, r) \subseteq \mathbb{C}$ telle que : $\forall z \in D(\alpha, r)$, $h(z) = (z-\alpha)^n \widetilde{h}(z)$ et $\widetilde{h}(\alpha) \neq 0$.

Or, dans notre cas, h est analytique sur $\mathbb{C}$ et, puisque $h(\alpha) = 0$ et $h'(\alpha) \neq 0$, son développement en série entière en α est $h(z) = (z-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^{k-1} = (z-\alpha)\widetilde{h}(z)$ avec $\widetilde{h}(\alpha) = h'(\alpha) \neq 0$. Donc α est zéro isolé d'ordre $n = 1$ de h et comme $g \neq 0$, α est pôle simple de ϕ. D'après le calcul précédent,

$$\lim_{z \to \alpha}(z-\alpha)\phi(z) = \lim_{z \to \alpha}(z-\alpha)\frac{g(z)}{(z-\alpha)\widetilde{h}(z)} = \frac{g(\alpha)}{\widetilde{h}(\alpha)} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

Par ailleurs, il existe des complexes a_{-1} et a_k ($\forall k \in \mathbb{N}$) tels que la fonction ϕ se décompose comme suit :

$$\phi(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)\widetilde{h}(z)} = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

En effet, il suffit de multiplier les DSE des fonctions g et $1/\widetilde{h}$, les deux étant analytiques dans le disque $D(\alpha, r)$. La constante a_{-1} correspond au terme libre du produit de ces DSE. Or, la formule ci-dessus fournit par ailleurs le développement de Laurent de ϕ en α, et, à ce titre, on a : $a_{-1} = \text{Rés}(\phi; \alpha)$. On n'a plus qu'à multiplier la formule ci-dessus par $z - \alpha$ et passer à la limite quand $z \to \alpha$ pour obtenir le résultat voulu.

(d) Par la deuxième égalité de la question précédente (en particularisant ϕ à f) :

$$\text{Rés}(f; i\pi/2) = \left[\frac{e^{iz}}{(e^z + e^{-z})'}\right]_{z = i\pi/2} = \frac{e^{i(i\pi/2)}}{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}} = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}.$$

2) **(a)** Après avoir dessiné le contour $\Gamma(R)$, on observe que les éléments de $\frac{i\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$ (tous placés sur l'ordonnée) les plus proches du contour sont $\pm i\pi/2$ et $i3\pi/2$. Parmi eux, juste $i\pi/2$ est à l'intérieur du contour, les autres deux, tout comme les autres éléments de $\frac{i\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$, se trouvent à l'extérieur du contour $\Gamma(R)$, et ceci $\forall R > 0$.

(b) Puisque $i\pi/2$ est le seul point singulier de f contenu à l'intérieur du rectangle Γ_R, le théorème des résidus donne : $\displaystyle\int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 2\pi i \text{Rés}(f; i\pi/2) = \pi e^{-\pi/2}$.

(c) On va paramétrer $\gamma_2(R)$ par $[0, \pi] \ni y \mapsto R + iy \in \gamma_2(R)$ (dont la dérivée vaut i). Alors :

$$\left|\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{ie^{iR}e^{-y}}{e^R e^{iy} + e^{-R}e^{-iy}}dy\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{iR}e^{-y}}{e^R e^{iy} + e^{-R}e^{-iy}}\right| dy \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{e^R - e^{-R}}dy \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}}.$$

où pour l'avant-dernière inégalité on a utilisé : $\forall y \in \mathbb{R}$, $|e^R + e^{-R}e^{-i2y}| \geq e^R - e^{-R}$ et pour la dernière : $y \geq 0 \Rightarrow e^{-y} \leq 1$.

(d) Le dernier terme dans la suite d'inégalités ci-dessus tend vers 0 lorsque R tend vers ∞, c'est donc aussi le cas pour $\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz$. La preuve est complètement similaire pour $\int_{\gamma_4(R)} f(z)dz$, donc la somme des deux intégrales tend à 0 quand $R \to \infty$.
En effet, en utilisant une paramétrisation de $\gamma_4(R)$ par $[0,\pi] \ni y \mapsto -R + i(\pi - y) \in \gamma_4(R)$ (de dérivée $-i\pi$) on a (en tenant compte que $e^{\pm i\pi} = -1$) :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_4(R)} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{-i\pi e^{-iR}e^{y-\pi}}{e^{-R}e^{i(\pi-y)} + e^{R}e^{i(y-\pi)}}dy\right| \leq \left|\int_0^{\pi} \frac{\pi e^{-\pi}e^{y}}{|e^{-R}e^{iy} + e^{R}e^{-iy}|}dy\right| \\ &\leq \frac{\left|\pi e^{-\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{y}dy\right|}{e^R - e^{-R}}dy \leq \frac{\pi(e^{\pi}-1)}{e^R - e^{-R}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(e) On va paramétrer $\gamma_3(R)$ par $[-R,R] \ni x \mapsto -x + i\pi \in \gamma_3(R)$ (de dérivée égale à -1). On tiendra compte que $\gamma_1(R)$ se paramètre trivialement par l'application identique. On a :

$$\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}e^{-\pi}}{e^{-x}e^{i\pi} + e^{x}e^{-i\pi}}dx = \int_{-R}^{R} \frac{-e^{-\pi}e^{-ix}}{-e^{x} - e^{-x}}dx \overset{t=-x}{=} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\pi}e^{it}}{e^{-t} + e^{t}}dt = e^{-\pi}\int_{\gamma_1(R)} f(z)dz.$$

(f) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\left|\dfrac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\right| \leq \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$. Or $x \mapsto e^x + e^{-x} > 0$ diverge quand $x \to \pm\infty$ plus vite que tout polynôme. Il s'en suit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx := \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} \int_a^b \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx$ est absolument convergente et donc sa valeur principale, à savoir : V.P.$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx$ converge et vaut précisément $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx$.

3) Sachant que $\Gamma(R) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{4} \gamma_k(R)$, des questions précédentes on déduit :

$$\pi e^{-\pi/2} = \int_{\Gamma(R)} f(z)dz = (e^{-\pi} + 1)\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^{-x} + e^{x}}dx + \left(\int_{\gamma_2(R)} + \int_{\gamma_4(R)}\right) f(z)dz.$$

Or, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et comme $x \mapsto \sin x/(e^{-x} + e^{x})$ est impaire, son intégrale sur $[-R,R]$ est nulle pour tout $R > 0$. Alors, en passant à la limite $R \to \infty$ ci-dessus, on déduit :

$$\pi e^{-\pi/2} = e^{-\pi/2}(e^{-\pi/2} + e^{\pi/2})\,\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}dx$$

ce qui, tenant compte de la question (2.f), donne bien le résultat demandé.

Corrigé de l'Exercice V :

1) (a) $f(z)$ n'est pas définie ssi $(z-1)^2(z-3) = 0$ ssi $z = 1$ ou $z = 3$. Donc $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1,3\}$. On vérifie que pour tout $z \in \Omega$,

$$(\star) \qquad \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-3} = \frac{2(z-3) + (z-1)^2}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{z^2-5}{(z-1)^2(z-3)} = f(z)$$

(b) f est une fraction rationnelle et l'unicité de sa décomposition en éléments simples montre que celle-ci est donnée par le membre de gauche de l'égalité ($\star$). On en déduit aussi que f a 2 singularités : $z_1 = 1$ et $z_2 = 3$.
Autour de $z_1 = 1$, $z \mapsto 1/(z-3)$ est analytique donc le membre de gauche de ($\star$) peut être vu comme le développement de Laurent de f en $z_1 = 1$, ayant comme partie singulière l'unique terme $2/(z-1)^2$ donc $z_1 = 1$ est pôle d'ordre 2 de f. Pareillement, la partie singulière du développement de Laurent de f en $z_2 = 3$ est juste le terme $1/(z-1)$ donc $z_2 = 3$ est pôle d'ordre 1 de f.

2) (a) $\dfrac{1}{z-1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$. Par dérivation de la série entière terme à terme, on en déduit que

$$\Big(\frac{1}{z-1}\Big)' = -\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \text{ pour } |z| < 1.$$

Alternativement, on pourrait utiliser le produit de Cauchy (de la série de $1/(z-1)$ par elle-même). Pour $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

(b) On a

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3(1-z/3)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ pour } |z| < 3.$$

d'où pour $|z| < 1 = \min\{1, 3\}$,

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(2n+2-\frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n.$$

3) (a) On a pour $|z| > \alpha$,

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z}\times\frac{1}{1-\alpha/z} = \frac{1}{z}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{z^{n+1}}$$

(b) En utilisant 3)(a) pour $\alpha = 1$, on a

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ pour } |z| > 1.$$

On dérive terme à terme (séries absolument convergentes si $|z| > 1$) et on obtient

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\Big(\frac{1}{z-1}\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{z^n} \text{ pour } |z| > 1.$$

Pour $\alpha = 3$, on a

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} \text{ pour } |z| > 3$$

Donc on a pour $|z| > 3 = \max\{1, 3\}$,

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-3} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n-2+3^{n-1}}{z^n} + \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-2+3^{n-1}}{z^n}.$$