Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5 - Session 1 - Mardi 19/12/2017

Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Durée : 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés
Les 5 exercices sont indépendants.

Exercice I : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par $f(x)=\pi-|x|$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.

1) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi,3\pi]$. Quelle est la parité de f sur $[-\pi,\pi]$?

2) Montrer que f est C^0 et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Quels sont les points de discontinuité de f' ?

3) Pour $n\geq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos(nx)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(nx)$ dans la série de Fourier de f.

(a) Que vaut b_n pour $n\geq 1$?

(b) Montrer que $\forall n\geq 1,\ \ a_n=\dfrac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$.

4) Justifier, pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'égalité

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

5) En déduire que $\alpha=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

6) Soit $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Montrer que $S=\alpha+\dfrac{S}{4}$ et retrouver ainsi la valeur de S.

Exercice II : Soit z un nombre complexe, $z\neq 1$. Montrer que : $|z|=1 \iff \dfrac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R}$.
(Indication : on pourra écrire z de module 1 sous la forme $e^{i\theta}$, ou bien donner une interprétation géométrique)

Exercice III : Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y)=x^2-y^2+5x+y$.

1) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

2) Soit $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),\ \text{si } z=x+iy$$

soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(a) Ecrire les relations qui lient les dérivées partielles $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(b) En utilisant l'expression de $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, en déduire que $Q(x,y)=2xy+5y+b(x)$, où $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

(c) Calculer alors $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et en déduire que $b'(x)=-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(d) Préciser l'expression de $Q(x,y)$.

3) Montrer que la fonction f est donnée par : $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+(5-i)z+iB$, avec $B\in\mathbb{R}$.

Tournez la page s.v.p. $\hookrightarrow$

Exercice IV : Soit f la fonction complexe définie par $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$.

1) **(a)** Quel est le domaine de définition de f ? Sur quel ouvert maximal Ω de $\mathbb{C}$ est-elle holomorphe ?

(b) Préciser quelles sont les singularités de f et quelle est leur nature.

(c) Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ et $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec g ne s'annulant pas sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $h(\alpha) = 0$ avec $h'(\alpha) \neq 0$. Montrer que la fonction $\phi = \dfrac{g}{h}$ est bien définie sur $D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$ pour $r > 0$ assez petit et qu'elle a un pôle simple en α. Montrer que son résidu en α vaut

$$\mathrm{Res}\,(\phi, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha)\phi(z) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}.$$

(d) Déterminer le résidu de f en $i\pi/2$.

2) Soit $R > 0$ et $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R, R, R + i\pi, -R + i\pi$ orienté dans le sens direct. On notera par $\gamma_1(R)$ le segment orienté de $-R$ à R, $\gamma_2(R)$ le segment orienté de R à $R + i\pi$, $\gamma_3(R)$ le segment orienté de $R + i\pi$ à $-R + i\pi$ et $\gamma_4(R)$ le segment orienté de $-R + i\pi$ à $-R$.

(a) Faire un dessin du contour (lacet) $\Gamma(R)$ pour un $R > 2\pi$ et placer sur le dessin trois des singularités de f les plus proches du contour. Qu'observe-t-on ?

(b) Donner l'expression de $\displaystyle\int_{\Gamma(R)} f(z)\mathrm{d}z$ en fonction des résidus de f et en déduire sa valeur.

(c) Justifier l'inégalité : $\displaystyle\left| \int_{\gamma_2(R)} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}}$.

(d) Justifier : $\displaystyle\int_{\gamma_2(R)} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4(R)} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{R \to +\infty} 0$.

(e) Montrer que : $\displaystyle\int_{\gamma_3(R)} f(z)\mathrm{d}z = e^{-\pi} \int_{\gamma_1(R)} f(z)\mathrm{d}z$.

(f) Justifier : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx$.

3) En déduire que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$.

Exercice V : Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z^2 - 5}{(z-1)^2(z-3)}$

1) **(a)** Quel est le domaine de définition Ω de f ? Vérifier que l'on a

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-3} \quad (*)$$

(b) Préciser quelles sont les singularités de f, leur nature et leur ordre.

2) **(a)** Rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{z-1}$ et en déduire que

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n \text{ pour } |z| < 1.$$

(b) Utiliser $(*)$ et 2) (a) pour montrer que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2n + 2 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n \quad \text{pour } |z| < 1.$$

3) **(a)** Soit $\alpha > 0$. En écrivant que $\dfrac{1}{z-\alpha} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{1}{1-\alpha/z}$ pour $|z| > \alpha$, donner le développement en série de puissances de $1/z$ de $\dfrac{1}{z-\alpha}$.

(b) A l'aide de 3)(a) pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$, montrer que l'on a

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n - 2 + 3^{n-1}}{z^n} \quad \text{pour } |z| > 3.$$