Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5 - Session 1 - Mercredi 14/12/2016

Examen - Séries de Fourier et Analyse Complexe

Durée: 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.

Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

1) Tracer rapidement le graphe de f. Montrer que f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Quels sont les points de discontinuité de f ?

2) Pour $n \geq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos nx$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin nx$ dans la série de Fourier de f. Que vaut a_n pour $n \geq 0$? Calculer b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Justifier, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)$.

Par quoi faut-il remplacer le membre de gauche pour que l' égalité ci-dessus reste valable pour $x = \pi$?

4) En utilisant l'égalité obtenue à la question 3), calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

5) À l'aide de l'identité de Parseval pour f, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice II

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $Q(x, y) = \mathrm{sh}(y) \sin(x)$. Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$ si $z = x + iy$, soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

2) Écrire les relations qui lient les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

3) En utilisant l'expression de $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, en déduire qu'il existe une fonction dérivable $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $P(x, y) = -\mathrm{ch}(y) \cos(x) + c(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4) En calculant $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, montrer que la fonction c est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f soit donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = -\mathrm{ch}(y) \cos(x) + C + i\,\mathrm{sh}(y) \sin(x).$$

5) Conclure, en montrant que $f(z) = -\cos(z) + C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(on pourra utiliser la relation entre ch$y$ et $\cos(iy)$ et celle entre sh$y$ et $\sin(iy)$)

Exercice III

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $z \in D$, on pose $h(z) = \dfrac{3z^2}{1+z^3}$.

1) Résoudre en $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -1$. Préciser le domaine de définition et celui d'holomorphie de h.

2) Montrer qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence 1, que l'on précisera, telle que l'on ait $h(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour chaque $z \in D$.

Tourner la page s.v.p. —>

3) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur la frontière $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

4) Pour $z \in D$, on pose $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$. Montrer que g est holomorphe sur D et calculer $g'(z)$ pour $z \in D$.

5) Pour $z \in D$, on pose $\phi(z) = \frac{e^{g(z)}}{1+z^3}$. Montrer que la dérivée de la fonction $\phi(z)$ vérifie $\phi'(z) = 0$ pour $z \in D$. Calculer $\phi(0)$, et en déduire que

$$\forall z \in D, \;\; e^{g(z)} = 1 + z^3.$$

6) On note "Log" la détermination principale du logarithme complexe. Soit $f(z) = \mathrm{Log}(1+z^3)$. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ a t-on $z^3 \in]-\infty, -1]$? En déduire l'ouvert maximal $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe. Ω est-il convexe ? Est-il connexe ? Faire un dessin et justifier vos réponses.

7) Calculer $(f-g)'(z)$ pour $z \in D$. En déduire que $\forall z \in D, \;\; f(z) = g(z)$.

Exercice IV

On définit la fonction f par $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+b)^2 + a^2}$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe $(\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{C}^2$, avec $\mathrm{Im}(\alpha_+) > 0$, à préciser, tels que f soit holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_+, \alpha_-\}$. Vérifier que $\alpha_+ = \overline{\alpha_-}$.

2) Pour $R > a^2 + b^2$, soit C_R^+ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R défini par

$$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$$

et soit γ_R le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de C_R^+ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct. Notons Ω_R l'ouvert borné de $\mathbb{C}$ dont la frontière est γ_R.

a) Représenter sur une figure γ_R et les points $\alpha_\pm$.

b) Montrer que $f(z)$ s'écrit comme $\frac{g(z)}{z - \alpha_+}$, où g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_-\}$.

c) En déduire à l'aide de la formule de Cauchy que $\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi \mathrm{e}^{-a}}{a}(\cos(b) - i\sin(b))$.

d) En utilisant le théorème des résidus, en déduire que le résidu de f en α_+ vaut

$$\mathrm{Res}\,(f; \alpha_+) = -\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a}(\sin(b) + i\cos(b)).$$

3) On se propose de retrouver $\mathrm{Res}\,(f; \alpha_+)$ en partant de sa définition.

a) Donner les développements en série entière en α_+ de $z \mapsto \mathrm{e}^{iz}$ et de $z \mapsto (z - \alpha_-)^{-1}$.

b) En déduire le premier terme du développement en série entière de g autour de α_+.

c) En déduire la partie principale (singulière) du développement en série de Laurent de f en α_+. Sur quelle couronne centrée en α_+ ce développement est-il défini ? Justifier votre réponse.

d) Retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{Res}\,(f; \alpha_+)$ calculée précédemment.