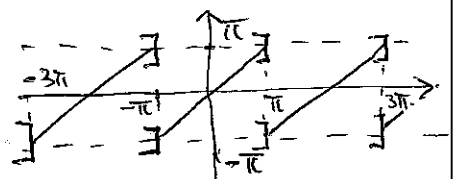
L3 – S5 – 2015-2016 SESSION 1

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE COMPLEXE et ANALYSE de FOURIER

EXERCICE I :

① f est même C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$:



les seuls points où f n'est pas continue sont ceux de l'ensemble $\pi(2\mathbb{Z}+1)$.

② f est impaire, donc $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{2}{\pi n}x\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nx)\,dx}_{\to\, =0}$$

d'où $\boxed{b_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}}$

③ Sur $]-\pi,\pi[$ f est C^∞, donc, par le thm. de Dirichlet, $\forall x \in]-\pi,\pi[$ $f(x)$ vaut la somme de la série de Fourier qui lui est associée :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \overset{(a_n = 0\ \forall n)}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx) \quad \forall x \in]-\pi,\pi[.$$

④ $x_0 = \pi$ est un des pts. de discontinuité de f. Pour ces points, le thm de Dirichlet s'écrit :

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx_0)$$

où $f(x_0^\pm) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ (limites à droite/gauche de f en x_0).

Pour $x_0 = \pi$, on a $f(x_0^\pm) = \mp\pi$ donc le m. de gauche de l'égalité vaut : $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ et l'égalité est tjs vraie, car son m. de droite vaut 0 aussi puisque $\sin(n\pi) = 0$ $\forall n$

⑤ On prend $x = \frac{\pi}{2} \in]-\pi,\pi[$ dans l'égalité de (3), et puisque

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 1 & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1} + \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{3} + \dots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} + \frac{(-1)}{3} + \frac{1}{5} + \frac{(-1)}{7} + \dots\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

d'où $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$

⑥ Le thm de Parseval pour le cas où

f est impaire s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \text{ , donc :}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

EXERCICE II : On rappelle que :

$$sh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \; ; \; ch(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

(donc : $sh'(\alpha) = ch(\alpha)$ et $ch'(\alpha) = sh(\alpha)$)

Aussi, si $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$sh(i\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \cdot i = i \sin(\alpha)$$

$$ch(i\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos(\alpha)$$

1 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = sh(y)\cos(x)$,

$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = ch(y)\sin(x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2 L'hypothèse f holomorphe sur $\mathbb{C}$ implique que les relations de Cauchy-Riemann sont vérifiées $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \overset{(*)}{=} \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \overset{(**)}{=} -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

3 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = ch(y)\sin(x)$

qu'on intègre par rapp. à x et on a :

$$P(x,y) = -ch(y)\cos(x) + c(y)$$

où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue dérivable car P est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (par l'hypothèse : $f = P + iQ$ holomorphe)

4 $\frac{\partial P}{\partial y} \overset{(3)}{=} -sh(y)\cos(x) + c'(y)$

et par $(**)$: $-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \overset{(1)}{=} -sh(y)\cos(x)$)

$\Rightarrow c'(y) = 0 \; \forall y$ i.e. c est une fonction réelle constante : $c(y) = C \in \mathbb{R}$ $(\forall y \in \mathbb{R})$

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) =$$
$$= -ch(y)\cos(x) + C + i\, sh(y)\sin(x)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(5) $\cos(z) \equiv \cos(x+iy) = \dfrac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$

$= \dfrac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left((\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{y}\right)$

$= \cos x \cdot \underbrace{\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}}_{ch(y)} - \sin x \cdot \underbrace{\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}}_{sh(y)} \cdot i$

Donc, en utilisant (4), on obtient bien :

$f(z) = -\cos(z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathbb{R}$.

EXERCICE III :

(1) h est une fonction rationnelle de var. complexe, dont le domaine de définition coïncide avec celui d'holomorphie (par les "théorèmes généraux") à savoir :

$\operatorname{dom} h = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z^3+1=0\}$.

Or, $z^3+1=0 \iff z^3=-1 \Rightarrow |z|^3=1 \Rightarrow |z|=1$.

Donc les racines sont à chercher sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$ (centré en 0).

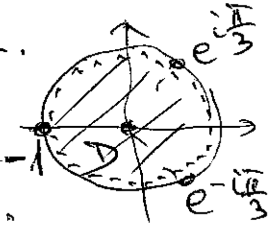
On doit résoudre donc $(e^{it})^3 = -1 = e^{i\pi}$

d'où les racines $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

i.e. -1 et $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $\operatorname{dom} h = \mathbb{C} \setminus \{-1, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\}$.

(2) D'après (1), h étant holomorphe sur $\operatorname{dom} h$ et comme $D = \{z \mid |z|<1\} \subset \operatorname{dom} h$ et $0 \in D$, par thm "holomorphe $\iff$ analytique" on déduit que h est developpable en série entière autour de $z_0 = 0$ dans un disque ouvert dont le rayon maximal, est égal à la distance entre 0 et l'ensemble $\{-1, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\}$, à savoir $= 1$.



Ceci assure qu'il $\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in D$.

Pour les calculer concrètement, on a :

$h(z) = 3z^2 \cdot \dfrac{1}{1+z^3} = 3z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n} =$

$= 3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n+2}$

Donc $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 3\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}+1 \\ 3(-1)^n & \text{si } n \in 3\mathbb{N}+2 \end{cases}$

Remarquer que, a posteriori, on peut retrouver le rayon de cvgce $R = 1$ de la formule :

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 3^{1/n} = 1.$$

(3) Pour aucun ~~des~~ points de la forme $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$ le terme général de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{(3n+2)it}$ n'a pas de limite ; en particulier, il ne converge pas à 0, donc la série ne peut converger (critère nécessaire de cvgce pour les séries numériques)

(4) Par définition, g est analytique sur un disque ouvert centré en 0, qu'on notera $\tilde{D}$.
Son rayon $\tilde{R}$ est donné par :

$$\tilde{R}^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln n} = e^{-0} = 1$$

Donc $\tilde{D} = D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Donc g est holomorphe sur D donc dérivable sur D et $g'(z)$ s'obtient en dérivant sa série terme à terme :

$$\forall z \in D : g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(5) On observe déjà que à (4) nous avons montré que $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = h(z)$, $\forall z \in D$.
Aussi, $\forall z \in D$, ϕ est bien définie et ϕ est holomorphe sur D (composée de fonctions holomorphes) donc $\exists \phi'$ et vaut, $\forall z \in D$:

$$\phi'(z) = \frac{e^{g(z)}}{(1+z^3)} \left(g'(z) - \frac{3z^2}{1+z^3} \right)$$

Or $h(z) = \frac{3z^2}{1+z^3}$ $\forall z \in D$, d'où

$\phi'(z) = 0$ $\forall z \in D$, donc ϕ est fonction cte sur D. Or, $0 \in D$ donc :

$$\phi(0) = e^{g(0)} \cdot \frac{1}{1+0^3} = e^0 = 1$$

Donc $\phi(z) = 1$ $\forall z \in D \iff e^{g(z)} = 1 + z^3$ $\forall z \in D$

(6) $z^3 \in]-\infty, -1] \Rightarrow |z| \geq 1$

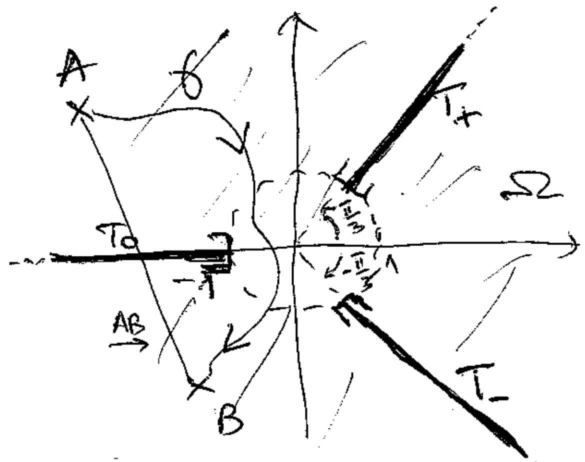
Aussi, $z^3 = |z| e^{it} \in \mathbb{R}_-$ lorsque $e^{3it} = e^{i\pi}$ donc $e^{it} = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Donc $z^3 \in]-\infty, -1] \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \geq 1 \text{ et} \\ z = |z| e^{it} \text{ avec} \\ t \in \frac{\pi}{3}(2\mathbb{Z}+1) \end{cases}$

On sait que Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ donc $z \mapsto \mathrm{Log}(1+z^3)$ sera holomorphe à l'exception des z t.q. $\cancel{1+z}^3 \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow z^3 \in]-\infty, -1]$.

Conclusion : f est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus (T_\pm \cup T_0)$ où $T_\pm = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, z = |z| e^{i(\pm\frac{\pi}{3})} \}$ et $T_0 =]-\infty, -1] \subset \mathbb{C}$.

$\Omega = \mathbb{C} \setminus (T_\pm \cup T_0)$ est ouvert, connexe car toute paire de points A et $B \in \Omega$



peuvent être unis par un chemin dans Ω (γ ds. la figure).

Mais Ω n'est pas convexe car, par ex. pour les pts A et B de la figure, le segment de droite $\overline{AB}$ n'appartient pas à Ω, puisque $\overline{AB} \cap T_0 \neq \emptyset$.

(7) Obs : $D \subset \Omega$ donc f est holomorphe sur D et on a : $f'(z) = \frac{(1+z^3)'}{1+z^3} = \frac{3z^2}{1+z^3} = h(z)$

Donc $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z) = h(z) - h(z) = 0$

Aussi $f(0) = \mathrm{Log}(1) = \ln 1 = 0$ et $g(0) = 0$ donc $f - g = 0$ sur D donc f est un prolongement analytique de g à Ω.

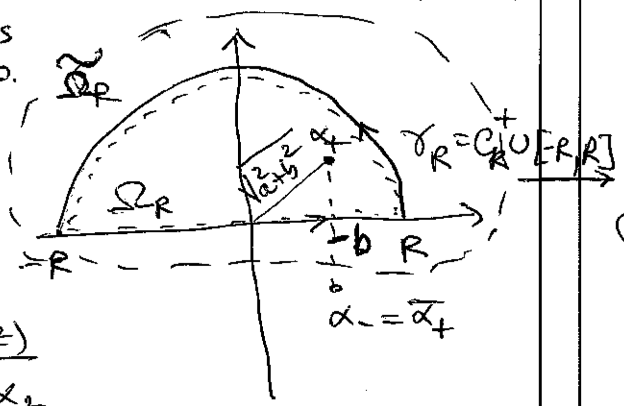
EXERCICE IV :

(1) f est une expression issue de la multiplication de $z \mapsto e^{iz}$ (holomorphe sur $\mathbb{C}$) avec $z \longmapsto \frac{1}{(z+b)^2+a^2}$ qui est holomorphe partout sauf en $\alpha_\pm$ = racines de $(z+b)^2+a^2$.

Comme $a, b \in \mathbb{R}$, $(z+b)^2+a^2$ est polynôme à coeffs réels $\Rightarrow$ ses racines complexes (si elles $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) sont nécessairement conjuguées, donc $\alpha_+ = \overline{\alpha_-}$. On a :

$$\alpha_\pm = -b \pm ia \quad \text{car } a > 0 \Rightarrow \alpha_+ \in \mathbb{C}_+$$

(2) (a) Ds. la fig. on a pris $b<0$ donc $-b>0$.



(b) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} = \frac{\frac{e^{iz}}{z-\alpha_-}}{z-\alpha_+} = \frac{g(z)}{z-\alpha_+}$

donc $g(z) = \frac{e^{iz}}{z-\alpha_-}$ (définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_-\}$)

(c) Formule de Cauchy : $\oint_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-\alpha_+} dz = 2\pi i\, g(\alpha_+)$

donc (avec (b)) :

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \frac{e^{i(-b+ia)}}{(-b+ia-(-b-ia))} = \cancel{2\pi i} \frac{e^{-a}(\cos b - i \sin b)}{\cancel{2i}a}$$

(d) f est holomorphe sur $\tilde{\Omega}_R \setminus \{\alpha_+\}$ où $\tilde{\Omega}_R$ est un domaine de $\mathbb{C}$ qui inclut $\overline{\Omega_R}$ mais exclut α_-. On peut lui appliquer le thm. des résidus sur $\gamma_R \subset \tilde{\Omega}_R$:

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Rés}(f; \alpha_+)$$

d'où, en utilisant (c) on obtient la formule $\mathrm{Rés}(f; \alpha_+) = \frac{e^{-a}}{2ia}(\cos b - i \sin b)$

$$= \frac{e^{-a}}{2a}(-i)(\cos b - i \sin b) = -\frac{e^{-a}}{2a}(\sin b + i \cos b)$$

(3) (a) $e^{iz} = e^{i(z-\alpha_+)} e^{i\alpha_+} = e^{i\alpha_+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(z-\alpha_+)^n$

$$\frac{1}{z-\alpha_-} = \frac{1}{(z-\alpha_+)+(\alpha_+-\alpha_-)} = \longrightarrow$$

$$= \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-\alpha_+}{\alpha_+ - \alpha_-}} =$$

$$= \frac{1}{2ia} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2ia}\right)^n (z-\alpha_+)^n$$

(b) Comme $g(z) = e^{iz} \cdot \frac{1}{z-\alpha_-}$ le D.S.E. de g en α_+ sera le produit (dit "de Cauchy") des deux séries déduites à (b). Son premier terme sera le produit des termes libres des deux séries, à savoir :

$$\left(e^{i\alpha_+} \cdot \frac{i^0}{0!}\right) \cdot \left(\frac{1}{2ia}\right) = \frac{e^{i\alpha_+}}{2ia} = \frac{e^{-ib} \cdot e^{-a}}{2ia}$$

$$= \boxed{\frac{e^{-a}}{2ia}(\cos b - i \sin b) \underset{\text{noté}}{=} A}$$

(c) Le développement en série de Laurent de f s'obtient de : (on fait autour de α_+ !)

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha_+} \cdot g(z) = \frac{1}{z-\alpha_+} e^{iz} \cdot \frac{1}{z-\alpha_-} =$$

$$= \frac{1}{z-\alpha_+} \cdot \left(\frac{e^{i\alpha_+}}{2ia} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(z-\alpha_+)^n\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2ia}\right)^k (z-\alpha_+)^k\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{i\alpha_+}}{2ia} \cdot \frac{1}{z-\alpha_+}}_{\substack{\text{partie principale} \\ \text{(singulière)} \\ \text{de la série de Laurent}}} + \underbrace{\frac{e^{i\alpha_+}}{2ia} \cdot \frac{1}{\cancel{z-\alpha_+}} \cdot \cancel{(z-\alpha_+)} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \cdots (z-\alpha_+)^m\right)}_{\substack{\text{partie entière (régulière)} \\ \text{de la série de Laurent}}} \quad (*)$$

produit des 2 séries précédentes, privé de son premier terme

Comme la partie principale de la série de Laurent de f en α_+ est un polynôme en $X = \frac{1}{z-\alpha_+}$ de $d^o = 1$ et non pas une somme infinie, sa convergence est assurée, donc le petit rayon de la couronne de cvgce de la série de Laurent vaut zéro. (C'est tjs le cas lorsqu'on a à faire à une singularité effaçable ou a un pôle de f, et α_+ est un pôle d'ordre 1).

La partie entière donne le grand rayon de la couronne : or, on ne peut avoir convergence dans un disque de rayon $\geq \text{dist}\{\alpha_+ ; \alpha_-\} =$
$= |\alpha_+ - \alpha_-| = |2ia| = 2a$. Donc le DS Laurent converge sur $\mathcal{C}(\alpha_+ ; 0, 2a) = \mathring{B}(\alpha_+, 2a) \setminus \{\alpha_+\}$.

(d) $\text{Rés}(f ; \alpha_+) = \text{coeff de } \frac{1}{z-\alpha_+} \text{ dans } (*)$
$= \frac{e^{i\alpha_+}}{2ia} \overset{\text{voir (c)}}{=} \ldots = A.$