L3 - Maths - S5 - 2016-2017 SESSION 2

CORRIGÉ de l'examen d'Analyse de Fourier et d'Analyse complexe (du 21.06.2017)

EXERCICE I :

(1) $f(-x) = (-x)\sin(-x) = -(-x)\sin x = x\sin(x) = f(x)$

Donc f est paire et donc $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ car,

rappel : $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(x\cdot n)}_{\hookrightarrow \text{ fonction impaire}} dx = 0$

(2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(nx)}_{\hookrightarrow \text{ fonction paire}} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} x\sin((n+1)x)\,dx - \int_0^{\pi} x\sin((n-1)x)\,dx\right]$

Ces deux intégrales se calculent par IPP mais pour la deuxième on est obligés de calculer la primitive de $\sin((n-1)x)$ sauf pour le cas $n=1$ quand elle est nulle. Donc on a les cas :

$\underline{n=1}$: $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$

$\overset{IPP}{=} -\frac{1}{4\pi}\left(\left[x\cos x\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x\,dx\right)$

$= -\frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \left[\sin x\right]_0^{2\pi}\right) = -\frac{1}{2}$

$\underline{n \neq 1}$: $a_n = -\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\left(\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right)' dx - \int_0^{\pi} x\left(\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right)' dx\right)$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-1}\,x\cos((n-1)x) - \frac{1}{n+1}\,x\cos((n+1)x)\right]_0^{\pi}$

$+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\int_0^{(n+1)\pi}\cos x\,dx - \frac{1}{(n-1)^3}\int_0^{(n-1)\pi}\cos x\,dx\right)$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1}\right) +$

$+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\underbrace{\left[\sin x\right]_0^{(n+1)\pi}}_{\hookrightarrow = 0} - \frac{1}{(n-1)^3}\underbrace{\left[\sin x\right]_0^{(n-1)\pi}}_{\hookrightarrow = 0}\right)$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n^2-1}$

$-\cos((n+1)\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Pour le cas $n=0$ ceci donne : $a_0 = 2$.

(3) Sachant que la série de Fourier attachée à f a la forme : $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$

d'après (2) on obtient :

$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$

Cependant, on n'a $f(x) = S_f(x)$ que si f est C^1 par morceaux et cette égalité n'est valable que si x est un point où f est continue (Thm de Dirichlet).

Dans notre cas $x \mapsto x\sin(x)$ est bien sûr C^{∞} sur $]-\pi,\pi[$ donc pour $\forall x \in]-\pi,\pi[$:

$f(x) = 1 - \frac{\cos(x)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$.

(Obs : En vérité, f est continue sur $\mathbb{R}$ (à montrer !))

(4) Pour $x = 0 \in]-\pi,\pi[$ on déduit de (3) :

$0 = f(0) = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$

EXERCICE II :

① $f(z) = z^3 + (\bar{z})^3 = z^3 + \overline{z^3} = 2\mathrm{Re}(z^3) \in \mathbb{R}\ \forall z$.

② De (1) : si $f = P + iQ$ alors $f = \mathrm{Re} f$ ssi $Q = 0$. Or ds. ce cas les éq Cauchy-Riemann donnent : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ i.e. $P = f$ est nécessairement constante là où f est supposée holomorphe. Il nous reste à montrer que f n'est constante sur aucun ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \emptyset$.

Meth 1 : (voir CM) si f est holom. en z_0 alors $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ et ds. notre cas : $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial}{\partial z}(z^3 + \bar{z}^3) = 3z^2$, donc là où f serait holomorphe elle est constante et sa dérivée (nécessairement nulle) vaut $3z^2$. Il n'y a que $z = 0$ où c'est valable, or $\{0\}$ n'est pas ouvert ds. $\mathbb{C}$

Meth 2 : Calcul : $f(z) = 2\mathrm{Re}(z^3) = 2\mathrm{Re}((x+iy)^3) = \ldots = x(x^2 - 3y^2)$.

Il nous faut montrer que $(x,y) \overset{a}{\mapsto} x(x^2-3y^2)$ n'est constante sur aucun ouvert $\Omega \neq \emptyset$ de $\mathbb{C}$: or $\frac{\partial a}{\partial x} = 2(2x^2 - 3y^2)$ et $\frac{\partial a}{\partial y} = -12xy$ et $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0$ a pour unique sol. $(x,y) = (0,0)$.

EXERCICE III : $(E_n) : \bar{z} = z^{2n-1}$ ($\mathcal{S}_n$ = ens. des solutions)

① ⓐ Cas $n = 0$: l'équation est $\bar{z} = z^{-1}$ et elle n'est définie que sur $\mathbb{C}^*$. Là, elle équivaut à : $\bar{z}z = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Donc l'ensemble des sol. ds ce cas est :

$$\mathcal{S}_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial B(0;1) \subset \mathbb{C}^*.$$

ⓑ Cas $n = 1$: $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Donc $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}$

ⓒ Cas $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$: Solution évidente : $z = 0$.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $(E_n) \Leftrightarrow |z|^2 = z^{2n}$

- Ceci implique (seulement!) par application du module : $|z|^2 = |z|^{2n} \Leftrightarrow n = 1$ ou $|z| = 1$

Or $n \neq 1$, donc nécessairement $|z| = 1$.

- Si on pose $z = |z|e^{i\theta}$, avec $|z| = 1$, (E_n) devient : $1 = e^{i2n\theta} \Leftrightarrow 2n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Obs : ci-dessus $\theta_k = \pi \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donne $z_k = |z|e^{i\theta_k} = 1 \cdot e^{i\pi\frac{k}{n}}$ et en vérité il n'y a que $2n$ solutions distinctes, à savoir pour $k \in \mathbb{Z}/_{2n\mathbb{Z}}$, i.e. par ex : $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Conclusion : si $n \geq 2$ l'ensemble des sol. est :

$$\mathcal{S}_n = \{0\} \cup \{e^{i\pi\frac{k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}/_{2n\mathbb{Z}}\}$$

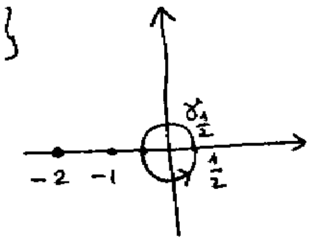
EXERCICE IV :

① f est une fonction dont l'expression est une fraction rationnelle : par les thm. généraux, elle est holomorphe sur son domaine de définition.

Or $z^2 + 3z + 2 = z^2 - 1 + 3(z+1) = (z+1)(z+2)$

Donc $D = D_{holo} = \mathbb{C} \setminus \{-1, -2\}$.

(2) $B(0;\frac{1}{2}) \subset D_{holo} = \mathbb{C} \setminus \{-1,-2\}$



donc par le Thm. de Cauchy

$$\oint_{\gamma_{\frac{1}{2}}} f(z)\,dz = 0$$

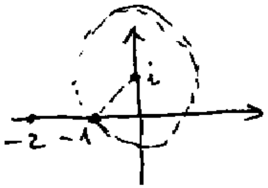
(3) $$f(z) = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z+2}$$

$$\left[(z+1)f(z)\right]_{z=-1} = a \iff a = \frac{-1}{-1+2} = -1$$

$$\left[(z+2)f(z)\right]_{z=-2} = b \iff b = \frac{-2}{-2+1} = 2$$

donc $$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2}$$

(4) (a) $i \in D_{holo} = \mathbb{C} \setminus \{-1,-2\}$



De surcroît, $\forall r \leq \operatorname{dist}(i;\{-1,-2\})$ on a : $\mathring{B}(i;r) \subset D_{holo}$. Donc f est holomorphe sur un disque ouvert centré en i de rayon maximal $r = \operatorname{dist}(i,-1) = \sqrt{2}$, et par Thm du CM, elle est analytique sur ce disque.

(b) On calcule le DSE de f sur $\mathring{B}(i;\sqrt{2})$:

$$f(z) = -\frac{1}{(z-i)+(1-i)} + \frac{2}{(z-i)+(2-i)} =$$

$$= -\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{i-1}} + \frac{2}{2-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{i-2}}$$

$$= +\frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i-1}\right)^n - \frac{2}{i-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i-2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(i-1)^{n+1}} - \frac{2}{(i-2)^{n+1}}\right)\cdot(z-i)^n$$

(5) La formule de la question (3) donne :

$$f(z) = \frac{-1}{z-(-1)} + \underbrace{\frac{2}{1+(z+1)}}_{\hookrightarrow \text{ holomorphe sur } \mathring{B}(-1;1) \text{ donc analitique}} =$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{z-(-1)}}_{\text{partie singulière du DS Laurent}} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-(-1))^n}_{\text{partie entière du DS Laurent}}$$

On voit que la partie singulière est un polynôme de degré 1 en variable $Y = \frac{1}{z-(-1)}$ donc elle converge en variable Y $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$.

La partie entière est une série entière qui converge seulement sur $\mathring{B}(-1;1)$.

Conclusion : le D.S. Laurent de f en -1 converge sur la couronne :

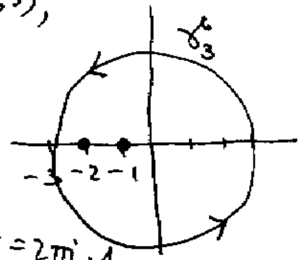
$$\mathcal{C}(-1;1) = (\mathbb{C}\setminus\{-1\}) \cap \mathring{B}(-1;1) = \mathring{B}(-1;1)\setminus\{-1\}$$

$$\operatorname{Rés}(f;-1) = \text{coeff. de } \frac{1}{z-(-1)} = -1.$$

(6) Si ϕ est holomorphe sur un ouvert convexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, et si $z_0 \in \Omega$ et si γ est un lacet parcouru une seule fois en sens direct, t.q. $\gamma \subset \Omega$ et z_0 se trouve

à l'intérieur du domaine entouré par γ, alors on a : $\oint_\gamma \frac{\phi(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\,\phi(z_0)$. (*)

Dans notre cas : $\gamma = \gamma_3 = \partial B(0;3)$, on prend $\phi = 1$ (cte) et successivement : $z_0 = -2$, puis $z_0 = -1$ et on a par (*) :



$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{z+2} = 2\pi i \cdot 1$ et $\int_{\gamma_3} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i \cdot 1$.

Après, tenant compte de la décomp. en él simples de f, on a :

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_{\gamma_3}\frac{dz}{z+1} + \int_{\gamma_3}\frac{2dz}{z+2}$$

$$= -2\pi i + 2\cdot(2\pi i) = 2\pi i$$

(7) A l'intérieur du domaine entouré par le lacet γ_3 il y a 2 singularités de f, dans -1 et -2. Par tout ailleurs, f est holomorphe. Alors le thm des résidus donne :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}(f;-1) + \text{Rés}(f;-2)\right)$$

Donc, en utilisant les résultats des questions (5) et (6) on déduit :

$$\text{Rés}(f;-2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} f(z)dz - \text{Rés}(f;-1) = 1-(-1) = 2$$

Obs : Ce résultat se voit directement sur la décomp. en él simples de f car :

$$f(z) = \underbrace{\frac{2}{z-(-2)}}_{\text{partie singulière du D.S. Laurent de } f \text{ en } -2} - \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{\text{holomorphe sur } \mathring{B}(-2;1) \text{ donc analytique donc donne la partie entière du DS Laurent de } f \text{ en } -2}$$

$\Downarrow$

$$\text{Rés}(f;-2) = \text{coeff de } \frac{1}{z-(-2)} = 2.$$