L3 - S1 - 2015-2016 - Session 2 : 21 Juin 2016

Examen d'analyse complexe et analyse de Fourier

Durée: **2** heures

Exercice 1 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$, on pose $P(x,y) = ax^2 + abxy + by^2$.
On veut étudier l'existence des applications f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathfrak{Re}\, f = P$ (partie réelle de f).

1) Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann pour $f = P + \mathrm{i}Q$ et ensuite énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, puis résoudre l'équation $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ en inconnue Q.

3) Remplacer la solution Q obtenue précédemment en l'équation $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ et montrer qu'on obtient $Q(x,y) = \frac{1}{2}ab(y^2 - x^2) - 2bxy + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante.

4) Remplacer Q ainsi obtenue dans l'équation de la question 2 et trouver une condition portant sur a et b.

5) Présenter le résultat, en donnant explicitement la famille de fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui vérifient $f = P + \mathrm{i}Q$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z} + \dfrac{1}{z^2}$.

1) Montrer que les racines de l'équation $f(z) = \dfrac{1}{z}$ sont nécessairement des *réels* α qui vérifient l'équation $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$.

2) Donner les expressions de $P = \mathfrak{Re}\, f$ et $Q = \mathfrak{Im}\, f$ (parties réelle et imaginaire de f).

3) Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

3.a) Indiquer (en justifiant la réponse) le domaine d'holomorphie de g.

3.b) Donner le développement en série de Laurent de g en $z_0 = 0$, en indiquant la partie singulière et la partie régulière (de Taylor) de celui-ci.

3.c) En déduire la valeur de $\mathrm{Res}(g;0)$, le résidu de g en $z_0 = 0$.

3.d) Indiquer (sans calcul mais en justifiant la réponse) le domaine de convergence du développement en série de Laurent de g en $z_1 = 2$.

3.e) Donner la partie singulière et les premiers termes (jusqu'à l'ordre 1) de la partie régulière (de Taylor) du développement en série de Laurent de g en $z_1 = 2$.

3.f) En déduire $\mathrm{Res}(g;2)$, le résidu de g en $z_1 = 2$.

4) Calculer les intégrales $J_0 = \displaystyle\int_{\partial B(0;1)} \overline{z}\, \mathrm{d}z$ et $J_1 = \displaystyle\int_{\partial B(2;1)} \overline{z}\, \mathrm{d}z$, où $\partial B(z;r)$ désigne la frontière de la boule de centre z et rayon r parcourue en sens direct. [Indication: intégrales curvilignes]

5) En déduire les valeurs des intégrales $I_0 = \displaystyle\int_{\partial B(0;1)} f(z)\, \mathrm{d}z$ et $I_1 = \displaystyle\int_{\partial B(2;1)} f(z)\, \mathrm{d}z$.

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = x$ pour $-\pi < x \leq \pi$.

1) Déterminer la série de Fourier de f.
[On rappelle la forme d'une série trigonométrique réelle: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$]

2) Justifier la relation $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)$ si $-\pi < x < \pi$.

3) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [Indication: formule de Parseval]

[Note: la question 4 est hors barème (bonus)]