Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5

Examen - Analyse Complexe - Session 1 - Vendredi 18/12/2015

Durée : 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice I

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$P(x,y) = x^3 - 3x(y-1)^2.$$

Soit $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$, si $z = x + iy$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.
2. Ecrire les relations qui lient les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.
3. En utilisant l'expression de $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, en déduire que $Q(x,y) = 3x^2(y-1) + a(y)$, où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Calculer alors $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et en déduire l'expression exacte (à une constante près) de $Q(x,y)$.
4. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f soit donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; f(z) = (z-i)^3 + Ai.$$

Exercice II

I) 1. Soient $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $h(\alpha) = 0$ avec $h'(\alpha) \neq 0$ et $g(\alpha) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$.

b) Pour tout $z \in D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$, on pose $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Montrer que f a un pôle simple en α et que le résidu de f en α vaut $\operatorname{Res}(f,\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$.

(on pourra écrire $f(z) = \frac{\widetilde{f}(z)}{z-\alpha}$ avec $\widetilde{f}$ holomorphe sur $D(\alpha,r)$ et $\widetilde{f}(\alpha) \neq 0$).

2. On définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+z+1}$.

a) Montrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$ avec $\alpha_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$ .Quelle est la nature des singularités de f en α_1 et α_2 ?

b) A l'aide du 1., montrer que

$$\operatorname{Res}(f,\alpha_1) = \frac{(\cos(\frac{1}{2}) - i\sin(\frac{1}{2}))e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{i\sqrt{3}}.$$

II) On se propose de calculer l'intégrale réelle $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+x+1}dx.$

Soit $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+z+1}$. Pour $R \geq 2$, soit C_R^+ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R défini par

$$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$$

et soit γ_R le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de C_R^+ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct.

1. Représenter sur une figure γ_R pour un $R \geq 2$ et les points α_1 et α_2.
2. A l'aide du résultat de la question I.2, calculer pour tout $R \geq 2$, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
3. Montrer que si $z \in C_R^+$ avec $R \geq 2$, alors
$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - R - 1},$$
puis que l'on a $\displaystyle\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - R - 1}$.
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
5. Donner la valeur de $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + x + 1}dx$ et en déduire la valeur de I .

Exercice III On écrira dans cet exercice toute série trigonométrique sous la forme $\displaystyle\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, où les coefficients a_n et b_n sont des nombres complexes pour $n \geq 0$.

I) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux. Rappeler la définition des coefficients de Fourier de f, a_n $(n \geq 0)$ et b_n $(n \geq 1)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note S_N la somme partielle de Dirichlet de f. Rappeler la définition de $S_N(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et énoncer le théorème de Dirichlet.

II) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$. On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de f.

1. Tracer rapidement le graphe de f. Montrer que f est continue, est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$? Montrer que f est paire, qu'en déduit-on sur ses coefficients de Fourier ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)]dx$$
3. Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité
$$\frac{\pi}{2}|\sin x| = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx).$$
4. Montrer que pour tout $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2m+1}$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ et la valeur de sa somme.
5. A l'aide des résultats des questions 3. et 4., montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}.$$
et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^2 - 16n + 3}$.