L3 - S5 - 2015-2016 — <u>SESSION 2</u>

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE COMPLEXE et ANALYSE de FOURIER

(du 21.06.2016)

<u>EXERCICE 1</u> : $f = P + iQ$

(1) Conditions de Cauchy-Riemann [C-R] en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{cases}$

f est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$ ssi

a) f vue comme application $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en (x_0, y_0) (où $z_0 = x_0 + iy_0$)

<u>et</u> b) les conditions [C-R] sont vérifiées en (x_0, y_0)

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ssi f holomorphe en chaque $z_0 \in \mathbb{C}$

(2) $$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2ax + aby \underset{[C-R-1]}{=} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = abx + 2by \underset{[CR-2]}{=} -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Alors en intégrant (par rapp à y) l'éq. [CR1] :

$$Q(x,y) = \frac{aby^2}{2} + 2axy + \lambda(x) \quad (*)$$

(3) En remplaçant Q ci-dessus en [CR-2] :

$$abx + 2by = -\left(2ay + \lambda'(x)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda'(x) = -abx - 2by - 2ay$$

d'où, par intégration par rapp. à x, on a :

$$\lambda(x) = -\frac{abx^2}{2} - 2bxy - 2axy + \mu$$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

On revient alors à $(*)$:

$$Q(x,y) = \frac{aby^2}{2} + \cancel{2axy} - \frac{abx^2}{2} - 2bxy - \cancel{2axy} + \mu \quad (**)$$

d'où le résultat demandé.

(4) On remplace Q de $(**)$ en [CR-1] :

$2ax + a\cancel{by} = a\cancel{by} - 2bx$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ (car on veut que f soit holom. $\forall z \in \mathbb{C}$!)

$\Longleftrightarrow (a+b)x = 0 \quad \forall x$

$\Longleftrightarrow \boxed{a = -b}$

(5) On vient de voir que $f = P + iQ$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ssi $a + b = 0$. Dans ce cas, on a : $P(x,y) = a(x^2 - axy - y^2)$

$$Q(x,y) = a\left(\frac{a}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + \delta\right) \quad \forall \delta \in \mathbb{R}$$

(ici $\mu = a\delta$; $a \neq 0$)

Donc on obtient la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (à une cte. multiplicative près) :

$$f(x,y) = (x^2 - axy - y^2) + i\left(\frac{a}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + \delta\right)$$

EXERCICE 2 :

① $f(z)=\frac{1}{z} \iff \bar{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}=0 \underset{z\neq 0}{\iff} \bar{z}z^2-z+1=0$

$\iff z|z|^2-z+1=0 \iff \underbrace{z(|z|^2-1)}_{\in\mathbb{R}}=\underbrace{-1}_{\in\mathbb{R}} \implies$

$\implies z\in\mathbb{R}$.

Obs : le cas $|z|^2-1=0 \iff |z|=1$ conduit a une prop. fausse : $z\cdot 0=-1$. Donc : $z=\frac{1}{1-|z|^2}$

Posons $z=a+ib$. Alors l'éq. équivaut à

$(a+ib)(1-(a^2+b^2))=1 \iff$

$\iff a(1-(a^2+b^2))-1+ib(1-(a^2+b^2))=0$

$\iff \begin{cases} b(1-(a^2+b^2))=0 \underset{\text{obs}}{\iff} b=0 \\ a(1-(a^2+b^2))=1 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} b=0 \\ a(1-a^2)=1 \iff a^3-a+1=0. \end{cases}$

② $f(z)=\bar{z}+\frac{1}{z^2}=\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2}=\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{|z|^4}$

Si $z=x+iy$, alors $\bar{z}^2=(x-iy)^2=(x^2-y^2)-i(2xy)$

Donc

$$f(x,y)=\underbrace{x+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{P(x,y)}+i\underbrace{\left(-y+\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)}_{Q(x,y)}$$

3.a g est une fraction rationnelle donc (par les "thm généraux") elle est holomorphe sur son dom. de définition : $\mathbb{C}^*$.

3.b L'expression $g(z)=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(z-0)^2}$ est déjà son developpement en série de Laurent (qui, ds. ce cas, n'a qu'un terme ! En effet :

$$g(z)=\underbrace{\frac{1}{(z-0)^2}+\frac{0}{z-0}}_{\text{partie singulière}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}0\cdot(z-0)^k}_{\text{partie régulière}=0}$$

3.c $\operatorname{Res}(g;0)=$ "coeff de $\frac{1}{z-0}$" $=0$ (voir ci-dessus)

3.d On a vu à (3.a) que g est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, donc elle est analytique (developpable en série de Taylor) sur $\mathbb{C}^*$. En $z_1=2\neq 0$ g est développable en série de Taylor sur une boule $\mathring{B}(2;r)$ t.q. $0\notin\mathring{B}(2;r)$ donc nécessairement $r=2$.

Conclusion : le developpement de Laurent de g en $z_1=2$ est le m̂ que celui de Taylor, et le domaine de celui-ci est $\mathring{B}(2;2)$

3.e On a en $z_1=2$: $(\forall z\in\mathring{B}(2;2))$:

$g(z)=\left(\frac{1}{z}\right)^2=\left(\frac{1}{z-2+2}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{z-2}{2}+1}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=$

$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(z-2)^k\right)^2=$

$=\frac{1}{4}\left(1+\left(-\frac{1}{2}(z-2)\right)+\dots\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(z-2)+\dots\right)$

Donc $g(z) = \underbrace{\dots + \frac{0}{(z-2)^2} + \frac{0}{z-2}}_{\text{Partie singulière = nulle !}} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(z-2) + \dots}_{\text{Partie Taylor.}}$

(3.f) $\mathrm{Res}(g;2) = $ "coeff de $\frac{1}{z-2}$" $= 0$ (voir ci-dessus)

(4) Pour J_0 : on paramétrise $\partial B(0;1)$ par $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, d'où $\gamma'(t) = i e^{it}$. Donc

$$J_0 = \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\, \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt$$
$$= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Pour J_1 : on paramétrise $\partial B(2;1)$ par $\gamma(t) = e^{it} + 2$, $t \in [0, 2\pi]$ d'où

$$J_1 = \int_{\partial B(2;1)} \bar z\, dz = \int_{\partial B(2;1)} (\bar z - 2)\, dz + 2 \underbrace{\int_{\partial B(2;1)} dz}_{=0 \text{ par Thm de Cauchy}}$$
$$= \int_0^{2\pi} \gamma(t) \gamma'(t)\,dt = 2\pi i$$

(5) $I_0 = J_0 + \int_{\partial B(0;1)} \frac{dz}{z^2} = J_0 + 2\pi i\, \mathrm{Res}(g;0) = 2\pi i$

$I_1 = J_1 + \underbrace{\int_{\partial B(2;1)} \frac{dz}{z^2}}_{= 0 \text{ aussi par Thm de Cauchy car } z \mapsto 1/z^2 \text{ holom. sur } B(2;1)} = J_1 + 2\pi i\, \mathrm{Res}(g;2) = 2\pi i$

EXERCICE 3 :

(1) f est fonction <u>impaire</u> donc $a_n = 0$ $\forall n = 0, \dots$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx \overset{\text{IPP}}{=}$$
$$= \left[-\frac{2}{\pi n} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0}$$
$$= \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

Donc la série de Fourier de f est

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)}$$

(2) f est C^∞ par morceaux. Donc, par Thm de Dirichlet, en chaque $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = S(x) \quad \text{i.e.} \quad \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)$$

(<u>Obs</u> : $\forall x \in]-\pi, \pi[$: $(f_+(x) + f_-(x))/2 = f(x) = x$)

(3) On prend $x = \pi/2$. Or, $\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2k \\ 1 \text{ si } n = 4k+1 \\ -1 \text{ si } n = 4k-1 \end{cases}$

on obtient (voir (2)) :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(4) Le thm de Parseval pour le cas : f impaire s'écrit : $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx$ donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$