Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5-2015-2016

Corrigé examen d'Analyse Complexe du 18/12/2015 (session 1)

Exercice I

1. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3(y-1)^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -6x(y-1)$.

2. Relations de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

3. On a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6x(y-1)$ donc $Q(x,y) = 3x^2(y-1) + a(y)$, où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Donc
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 + a'(y) = \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3(y-1)^2$$
d'où $a'(y) = -3(y-1)^2$ ce qui implique que $a'(y) = -(y-1)^3 + A$ avec $A \in \mathbb{R}$. On en déduit que $Q(x,y) = 3x^2(y-1) - (y-1)^3 + A$.

4. La fonction f est donnée par
$$\begin{aligned} f(z) &= P(x,y) + iQ(x,y) = x^3 - 3x(y-1)^2 + 3ix^2(y-1) - i(y-1)^3 + Ai \\ &= x^3 + 3ix^2(y-1) + 3x(i(y-1))^2 + (i(y-1))^3 + Ai \\ &= (x + i(y-1))^3 + Ai = (z-i)^3 + Ai. \end{aligned}$$

Exercice II

I) 1) a) Comme h est holomorphe, elle est analytique sur $\mathbb{C}$ et donc DSE autour de α. Donc il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(\alpha, R)$, on ait
$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n.$$
De plus, $a_0 = h(\alpha) = 0$ et $a_1 = h'(\alpha) \neq 0$. Donc $h(z) = (z-\alpha)\phi(z)$ avec $\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(z-\alpha)^n$. Comme $\phi(\alpha) = a_1 \neq 0$ et que ϕ est continue (car SE) , on en déduit qu'il existe $r > 0$ tel que $\phi(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\alpha, r)$. Donc $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$.

b) Pour tout $z \in D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$, d'après la question précédente, on a :
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{(z-\alpha)\phi(z)} = \frac{\widetilde{f}(z)}{z-\alpha},$$
avec $\widetilde{f} = \dfrac{g}{\phi}$ holomorphe sur $D(\alpha, r)$ (comme quotient de 2 fonctions holomorphes avec $\phi \neq 0$ sur $D(\alpha, r)$) et $\widetilde{f}(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\phi(\alpha)} \neq 0$. Ceci montre que f a un pôle simple en α et que le résidu de f en α vaut $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \widetilde{f}(\alpha)$. Comme $h(z) = (z-\alpha)\phi(z)$, on a $h'(z) = (z-\alpha)\phi'(z) + \phi(z)$, donc $h'(\alpha) = \phi(\alpha)$ d'où $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$.

2. a) On cherche les racines de $z^2 + z + 1$; comme $(z-1)(z^2+z+1) = z^3 - 1$, il s'agit des $z \neq 1$ qui vérifient $z^3 = 1$, soit les racines cubiques de l'unité distinctes

de 1, donc $z = e^{2\pi i/3} = \alpha_1$ et $z = e^{4\pi i/3} = e^{\pi i}e^{\pi i/3} = -e^{\pi i/3} = \overline{\alpha_1} = \alpha_2$. On a donc $z^2 + z + 1 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$ donc

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} = \frac{e^{iz}}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$

a deux singularités en α_1 et $\alpha_2 \neq \alpha_1$, qui sont des pôles simples. De plus, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{\alpha_1, \alpha_2\}$ comme quotient de 2 fonctions holomorphes avec $z^2+z+1 \neq 0$.
b) On a $f = \frac{g}{h}$ avec $g(z) = e^{iz}$ et $h(z) = z^2 + z + 1$ qui sont holomorphes et vérifient $h(\alpha_1) = 0$ avec $h'(\alpha_1) \neq 0$ (car α_1 racine simple de h) et $g(\alpha_1) = e^{i\alpha_1} \neq 0$. Les hypothèses de la question 1. sont vérifiées, on en déduit d'après 1.b) que

$$\text{Res}\,(f, \alpha_1) = \frac{g(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} = \frac{e^{i\alpha_1}}{2\alpha_1 + 1}.$$

Or $\alpha_1 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $2\alpha_1 + 1 = i\sqrt{3}$ et

$$e^{i\alpha_1} = e^{-\frac{i}{2}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = (\cos(\frac{1}{2}) - i\sin(\frac{1}{2}))e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

donc

$$\text{Res}\,(f, \alpha_1) = \frac{(\cos(\frac{1}{2}) - i\sin(\frac{1}{2}))e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{i\sqrt{3}}.$$

II) 1. On fait un dessin du demi-disque de rayon $R > 0$ dans le demi-plan $Im(z) > 0$ délimité par le lacet γ_R. On a $|\alpha_1| < 1 < 2 \leq R$ et $Im(\alpha_1) > 0$ donc α_1 est à l'intérieur de ce demi-disque ouvert tandis que α_2 est à l'extérieur car $Im(\alpha_2) < 0$.
2. On applique le théorème des résidus à la fonction f, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1, \alpha_2\}$ et au lacet γ_R qui ne passe par les pôles (α_1, α_2) de f. On a de plus $Ind(\alpha_1, \gamma_R) = 1$ et $Ind(\alpha_2, \gamma_R) = 0$ d'après le dessin obtenu au 1 et le fait que C_R^+ soit parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct. On a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\,\text{Res}(f, \alpha_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\cos(\frac{1}{2}) - i\sin(\frac{1}{2}))e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

3. Soit $z \in C_R^+$, donc $|z| = R \geq 2$ d'où par l'inégalité triangulaire

$$|z^2 + z + 1| \geq |z^2| - |z + 1| \geq R^2 - R - 1 > 0$$

car $|z+1| \leq |z|+1 = R+1$, $|z^2| = |z|^2 = R^2$ et $|z^2+z+1| \geq R^2-R-1 > 0$ pour $R \geq 2$ (car $R \geq 2 \Rightarrow R^2 \geq 2R \Rightarrow R^2 - R - 1 \geq R - 1 > 0$). De plus, $|e^{iz}| = e^{Re(iz)} = e^{-Im(z)} \leq 1$ car $Im(z) \geq 0$ pour $z \in C_R^+$. Finalement, on a $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-R-1}$ pour tout $z \in C_R^+$. Donc

$$\Big|\int_{C_R^+} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\Big| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|Rd\theta \leq \frac{\pi R}{R^2 - R - 1}.$$

4. On a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(x)dx + \int_{C_R^+} f(z)dz.$$

De plus, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} \dfrac{dx}{1+x^2} < +\infty$ donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ est absolument convergente et on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Par ailleurs, on déduit du résultat de la question 3. que $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+} f(z)dz = 0$ donc

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

5. On déduit des questions 2. et 4. que

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\cos(\frac{1}{2}) - i\sin(\frac{1}{2}))e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

puis que

$$I = Re(J) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2})e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice III

I) On a

$$\forall n \geq 0,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ et } \forall n \geq 1,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

et $S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème de Dirichlet : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, 2π- périodique sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2},$$

où $f(x_\pm) = \lim_{h\to 0+} f(x \pm h)$.

II) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$. On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de f.

1. $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f'(0+) = 1$ et $f'(0-) = -1$, donc f n'est pas dérivable en 0. Donc f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, mais f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On vérifie que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est paire. On en déduit que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 1$, on a par parité de la fonction $x \mapsto |\sin x|\cos(nx)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin x\cos(nx)dx$$

donc en utilisant $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin(a+b) - \sin(b-a)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)]dx$$

3. On a donc pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)x)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n-1)x)dx = \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos((n+1)x}{n+1}]_0^{\pi} + [\frac{\cos((n-1)x}{n-1}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{(1-\cos((n+1)\pi)}{n+1} + \frac{(\cos((n-1)\pi)-1)}{n-1}] \end{aligned}$$

Si n est impair, $n \pm 1$ est pair et on a $\cos((n+1)\pi) = \cos((n-1)\pi) = 1$ d'où $a_n = 0$ (vrai aussi pour $n = 1$) ; pour n pair, on a $\cos((n+1)\pi) = \cos((n-1)\pi) = -1$, d'où $a_n = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1})$ (vrai aussi pour $n = 0$ car $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}$.)
On applique le théorème de Dirichlet à f et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cos 2nx = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}) \cos(2nx)$$

d'où

$$\frac{\pi}{2}|\sin x| = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}) \cos(2nx).$$

4. On fait le changement de variable $n = k+1$ dans la 1ère somme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{m} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2m+1}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que la série de terme général $(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = 1$

5. Comme $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, on déduit des question 3. et 4. que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}|\sin x| &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1})(1 - 2\sin^2(nx)) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}) \sin^2(nx) \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) \sin^2(nx) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}
\end{aligned}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}.$$

On applique cette égalité à $x = \frac{\pi}{2}$, en utilisant : $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ si n est pair et ± 1 si $n = 2k-1$ est impair.

$$1 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{4n^2-1} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2((2k-1)\frac{\pi}{2})}{4(2k-1)^2-1} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{16k^2-16k+3}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^2-16n+3} = \frac{\pi}{8}$.