L3 - S1 - 2014-2015 - Session 2 : 24 Juin 2015

Examen d'analyse de Fourier et analyse complexe

Durée: **2** heures; le barème est donné à titre indicatif

On rappelle: 1) la forme canonique d'une série trigonométrique: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ (formulation réelle). 2) $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Exercice 1 : [3,5 pts.]

1.a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Montrer qu'on a alors aussi $z^{2015} + \dfrac{1}{z^{2015}} = 1$.

1.b) Donner la série de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cos(2015x)$. Est-elle convergente sur $\mathbb{R}$? (Indication: la solution doit tenir sur une ligne. Expliquer pourquoi n'a-t-on pas besoin de calculer les coefficients a_n et b_n)

Exercice 2 : [5,5 pts.]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$.

1) Montrer que f est paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Déterminer la série de Fourier de f.
(Indication: lors du calcul des coefficients de Fourier, on pourrait distinguer entre les cas de figure: n pair / n impair)

2) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\dfrac{\pi}{2}|\sin x| = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx)$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2m+1}$.

4) En déduire que $|\sin x| = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : [9 pts.]

1) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et deux fonctions $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que g et h sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$. Soit $f = \dfrac{g}{h}$.

1.a) Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{h}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $h(z) = (z - z_0)\widetilde{h}(z)$, et qu'on a $h'(z_0) = \widetilde{h}(z_0)$.
(Indication: developpement de Taylor de h en z_0)

1.b) En déduire que le résidu de f en z_0 est donné par $\mathrm{Res}(f; z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.
(Indication: developpement de Laurent de f en z_0)

2) On se propose de calculer par la méthode des résidus l'intégrale: $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.
Pour $R \geq 2$ on considère le chemin fermé Γ_R dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z \geq 0\}$, parcouru dans le sens trigonométrique, formé du segment $\gamma_R = [-R, R]$ sur l'axe des abscisses et du demi-cercle C_R centré à l'origine et de rayon R. Soit $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+2z+2}$.

2.a) Calculer les pôles de f et donner leur ordre de multiplicité (faire un dessin representant les pôles de f et le chemin Γ_R).

2.b) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$. (Indication: on pourrait utiliser la question (1.b))

2.c) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
(Indication: on pourrait montrer que le module de l'intégrale est majoré par $\pi R/(R-1)^2$)

2.d) En déduire la valeur de I.

Tournez la page s.v.p. $\hookrightarrow$

Exercice 4 : [8 pts. dont 6 pts. bonus]

1) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que, vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, elle est de classe C^1. On définit les "opérateurs différentiels" $\partial = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big)$ et $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big)$.
Si $f = u + \mathrm{i}v$, rappeler les conditions de Cauchy-Riemann et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour f d'être holomorphe en un $z_0 \in \mathbb{C}$ est $(\overline{\partial} f)(z_0) = 0$.

2) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 - \overline{z}^2 + |z|^2$.

2.a) Caculer les expressions des fonctions u et v correspondant à cette fonction.

2.b) Calculer $\overline{\partial} f$ en un z arbitraire du plan complexe. En déduire que le seul point où f est dérivable est $z_0 = 0$.
(Indication: on pourrait utiliser la question 1)

2.c) f est-elle développable en série entière sur un disque ouvert de centre $z_0 = 0$ et de rayon $r = 1$? Justifiez votre réponse.

2.d) Calculer la dérivée f' en $z_0 = 0$ à l'aide de la définition.

2.e) Vérifier qu'on obtient le même résultat en calculant la valeur de ∂f en $z_0 = 0$.