L3-S1 - 2014-2015 **SESSION 2** (24.06.2015)

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE de FOURIER et ANALYSE COMPLEXE

EXERCICE 1 : 1.a. $z \in \mathbb{C}^*$ donc $z + \frac{1}{z} = 1 \iff$

$\iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z_\pm = e^{\pm i\pi/3}$

Alors $S(z_\pm) := z_\pm^{2015} + \frac{1}{z_\pm^{2015}} = e^{\pm i \frac{2015}{3}\pi} + e^{\mp i \frac{2015}{3}\pi}$

$= 2\cos\left(\frac{2015}{3}\pi\right)$ (plus de $\pm$ car cos est paire)

Or $\frac{2015}{3} = \underbrace{671}_{\text{pas bon car pas nb. pair}} + \frac{2}{3} = 670 + \frac{5}{3} = 2 \cdot 335 + \frac{5}{3}$

Donc $S(z_\pm) = 2\cos\left(335 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}\right) =$

$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

1.b $\sin x \cos(2015x) \underset{\text{formule donnée}}{=} \frac{1}{2}\sin(x - 2015x) + \frac{1}{2}\sin(x + 2015x)$

$= -\frac{1}{2}\sin(2014x) + \frac{1}{2}\sin(2016x)$

qui est un polynôme trigonométrique et donc constitue le d.l. en série de Fourier de f (ici c'est une série dont tous les a_n et b_n sont $= 0$ à l'exception de $b_{2014} = -\frac{1}{2}$ et $b_{2016} = \frac{1}{2}$) qui cvge $\boxed{\text{trivialement}}$ pour $\forall x$ (la somme étant f).

On n'a donc pas eu besoin de calculer a_n, b_n car f était pratiquement déjà developpée en série.

EXERCICE 2 :

1 $\forall x$: $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ et $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ donc π-périodique, donc 2π-périod.

Comme f est paire, on a $b_n = 0$ $\forall n$ et

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\right)dx$

$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$

Si $n = 2p \in 2\mathbb{N}$: $a_{2p} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(2p\pi+\pi)-1}{2p+1} - \frac{\cos(2p\pi-\pi)-1}{2p-1}\right)$

$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1-1}{2p+1} - \frac{-1-1}{2p-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right)$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Si $n = 2p+1 \in 2\mathbb{N}+1$:

$a_{2p+1} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(2\pi(p+1))-1}{2(p+1)} - \frac{\cos(2\pi p)-1}{2p}\right)$

$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{+1-1}{2(p+1)} - \frac{+1-1}{2p}\right) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Donc $a_n = 0$ si n impair et $a_n \neq 0$ si n pair.

En particulier : $a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{0+1} - \frac{1}{0-1}\right) = \frac{4}{\pi}$. Donc la série de Fourier S_f attachée à f est :

$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx)$

2 $x \mapsto |\sin x|$ est C^1 par morceaux, donc, par le thm. de Dirichlet on a l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$:

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx)$

(3) Dans la somme il y a un "télescopage" :

$$\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2m-1}} - \frac{1}{2m+1} = 1 - \frac{1}{2m+1}$$

Aussi, en remplaçant dans la formule de (2) $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$ on obtient

$$\frac{\pi}{2}|\sin x| = 1 - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{4n^2-1}\right)\left(-2\sin^2(nx)\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)}_{=1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$$

d'où le résultat demandé.

EXERCICE 3 : (Obs : La quest. 1) est une question de CM en vérité.)

(1.a) Puisque h est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (entière) elle est analytique, i.e. développable en série entière (Taylor) en chaque $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$h(z) = \underbrace{h(z_0)}_{= 0 \text{ (par hypothèse)}} + \frac{(z-z_0)h'(z_0)}{1!} + \frac{(z-z_0)^2 h''(z_0)}{2!} + \dots$$

$$= (z-z_0)\underbrace{\left(\frac{h'(z_0)}{1!} + \frac{h''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \dots\right)}_{\text{série entière cvgte sur } \mathbb{C} \text{ dont la somme on la note } \tilde{h}(z)}$$

En dérivant $h(z) = (z-z_0)\tilde{h}(z)$ on a :
$h'(z) = \tilde{h}(z) + (z-z_0)\tilde{h}'(z)$, donc si $z = z_0$ on a $h'(z_0) = \tilde{h}(z_0)$.

(1.b) z_0 est un pôle simple* de $f = \frac{g}{h}$ donc le développement de Laurent de f autour de z_0 aura une partie singulière formée d'un seul élément : $\frac{Res(f;z_0)}{z-z_0}$ et une partie taylorienne. Il sera donc convergent sur la couronne $\mathcal{C}(z_0; r=0; R=\infty)$ i.e. sur $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. En effet, on a :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \overset{(1.a)}{=} \frac{g(z)}{(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{g(z)}{\tilde{h}(z)}\right)$$

$$\overset{=}{} \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{g(z_0)}{\tilde{h}(z_0)} + \frac{z-z_0}{1!}\left(\frac{g}{\tilde{h}}\right)'(z_0) + \dots\right)$$

[Taylor pour $g/\tilde{h}$ qui est holomorphe par hyp et (1.a)]

$$= \underbrace{\frac{g(z_0)/\tilde{h}(z_0)}{z-z_0}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{\left(\frac{g}{\tilde{h}}\right)'(z_0) + \frac{z-z_0}{2!}\left(\frac{g}{\tilde{h}}\right)''(z_0) + \dots}_{\text{partie Taylorienne}}$$

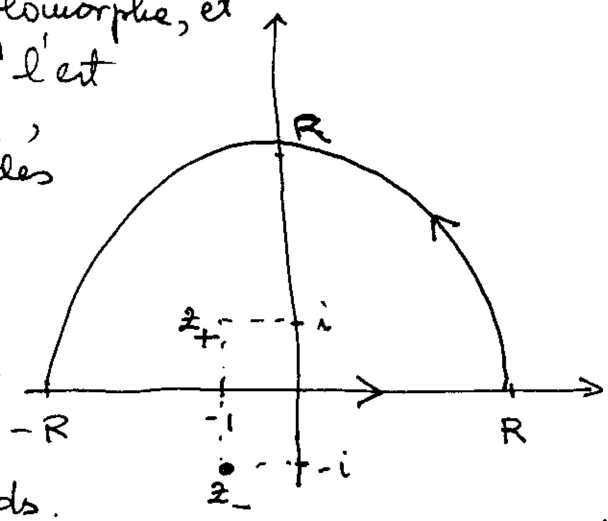
donc $Res(f; z_0) = \dfrac{g(z_0)}{\tilde{h}(z_0)} \overset{(1.a)}{=} \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

* On peut voir qu'il est pôle simple de différentes façons mais le calcul fait après, le montre aussi.

2) <u>Obs</u> : $\dfrac{\cos x}{x^2+2x+2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\right)$ ce qui suggère de considérer ds. le plan complexe la fonction f donnée.

2.a) $z^2+2z+2=0 \iff (z+1)^2+1=0 \iff z_\pm = -1\pm i$

Comme $z\mapsto e^{iz}$ est holomorphe, et comme $z\mapsto (z^2+2z+2)^{-1}$ l'est aussi en dehors des $z_\pm$, on déduit que $z_\pm$ sont des pôles simples de f et on voit que seulement $z_+=-1+i$ se trouve à l'intérieur du lacet Γ_R, donc z_- n'aura aucune participation ds. nos calculs.



2b. $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,z_+) + \underbrace{\mathrm{Res}(f,z_-)}_{=0 \text{ comme on l'a vu avant}}\right)$ (Thm. des résidus écrit a priori, pour $\forall$ lacet Γ)

$\overset{(1.b)}{=} 2\pi i \dfrac{e^{iz_+}}{\left[(z^2+2z+2)'\right]_{z=z_+}}$

$= 2\pi i \dfrac{e^{i(-1+i)}}{2(-1+i)+2} = \dfrac{\pi}{e} e^{-i}$

2.c) On paramètre l'arc de cercle (demi-cercle) par $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$, et alors

$\displaystyle\oint_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\gamma_R(\theta))\,\gamma_R'(\theta)\,d\theta =$

$\displaystyle= \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}}{(Re^{i\theta}+1)^2+1}\,d\theta$,

d'où $\displaystyle\left|\oint_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\theta}\cdot R\,|\overbrace{ie^{i(R\cos\theta+\theta)}}^{=1}|}{(1-R)^2}\,d\theta$

$\displaystyle\underset{\sin\theta\ge 0 \text{ sur } [0,\pi]}{\le} \frac{R}{(R-1)^2}\int_0^\pi d\theta = \frac{\pi R}{(R-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$

2.d) On a : $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} = \oint_{C_R} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx$

donc, par (2.b) et (2.c), en passant à la $\lim_{R\to\infty}$ et sachant que la fonction $x\mapsto \dfrac{e^{ix}}{x^2+2x+2}$ est intégrable $\int_{-\infty}^{+\infty}$, on a :

$\displaystyle J \overset{\text{not.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx$

$\displaystyle\overset{\text{déf}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} - \lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}$

$= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f;z_+) - 0 = \dfrac{\pi}{e}e^{-i}$

Or, $I = \mathrm{Re}(J)$ donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{e}\cos 1}$

EXERCICE 4 : (1) Comme on sait que $f \in C^1$, alors (Thm. du CM) Les conditions de Cauchy-Riemann en $z_0 \Longleftrightarrow$ holomorphe en z_0. Ces conditions sont :

$$[CR] : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} f = u+iv \\ z_0 = x_0+iy_0 \end{cases}$$

Or

$$(\bar\partial f)(z_0) = 0 \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right)(x_0,y_0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(x_0,y_0) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ [C.R] en (x_0,y_0) (i.e. en $z_0 = x_0+iy_0$)

(2a) __Obs__ : $\bar z^2 = \overline{z^2}$ donc $f(z) = (z^2 - \overline{z^2}) + |z|^2$

$$= 2i\,\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 = \underbrace{(x^2+y^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(4xy)}_{v(x,y)}$$

(2b)

$$(\bar\partial f)(z) \overset{[CR]}{=} \dots = \frac{1}{2}(2x-4x) + \frac{i}{2}(2y+4y)$$

$$= -x + 3iy \quad (\text{où } z = x+iy)$$

Donc $(\bar\partial f)(z) = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$, i.e. $z = 0$.

Donc f n'est dérivable qu'en $z_0 = 0$.

(2.c) Non. Elle n'est holomorphe (donc analytique) que en un seul point : $z_0 = 0$, donc elle est developpable en série entière seulement sur un disque de centre $z_0 = 0$ et de rayon $r = 0$!! Donc un point. Autant dire qu'elle ne l'est pas, sur aucun disque $\mathring{B}(0;\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$.

(2.d)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{f(z)}{z}.$$

Or

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{z^2 - \bar z^2 + z\bar z}{z} = \underbrace{z+\bar z}_{2\mathrm{Re}\,z} - \frac{\bar z^3}{|z|^2}$$

Posons $z = Re^{i\theta}$. Alors

$$\frac{f(z)}{z} = R\cos\theta - \frac{R^3 e^{-i3\theta}}{R^2} = R(\cos\theta - e^{-i3\theta})$$

donc $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 2R \to 0$, $R \to 0$ uniformément en θ.

donc $f'(0) = 0$ (par critère polaire au $\mathbb{R}^2$)

(2.e)

$$(\partial f)(z) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right)(z) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) + \frac{i}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$= \frac{1}{2}(2x+4x) + \frac{i}{2}(-2y+4y)$$

$$= 3x + y$$

Donc en $z_0 = 0$ on a $(\partial f)(0) = 3\times 0 + 0 = 0$. donc la même valeur obtenue à (2.d) pour $f'(0)$.

__Obs__ : ceci est normal, car on a vu en CM que pour tout $z \in \mathbb{C}$ t.q. $(\bar\partial f)(z) = 0$, $\exists f'(z)$ et est $= (\partial f)(z)$ (montré à (1))