L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2025–2026

EXAMEN FINAL (CORRECTION)

le 16 décembre 2025

2 pages, durée : 2h

Chaque réponse doit être justifiée

Exercice 1 (4 points).

a) (1,5 pts) Donner la définition de la décomposition de Dunford pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

b) (1 pt) Déterminer la décomposition de Dunford de A. (Vous devez justifier que la décomposition que vous proposez est bien une décomposition de Dunford.)

c) (1,5 pts) Calculer $\exp(A)$.

Solution :

a) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une décomposition de Dunford est une écriture $A = S + N$ avec $S, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où

- S est diagonalisable,
- N est nilpotente,
- S et N commutent, c'est-à-dire $SN = NS$.

b) Montrons que

$$S = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

conviennent. La matrice N est nilpotente car $N^3 = 0$. La matrice $S = I$ est diagonalisable et commute avec toute matrice, en particulier avec N.

c) Comme S et N commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(S + N) = \exp(S)\exp(N).$$

On a $S = I$, donc

$$\exp(S) = \exp(I) = eI.$$

Comme $N^3 = 0$, le développement en série de l'exponentielle donne

$$\exp(N) = I + N + \frac{1}{2}N^2.$$

On en déduit

$$\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\exp(A) = \exp(S)\exp(N) = e \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (3,5 points)**.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C}).$$

a) (2 pts) Déterminer le polynôme minimal de A.
b) (1,5 pts) Calculer $(A^2 - 2A)^{2027}$.

Solution.

Remarque. La matrice de cet exercice n'est clairement pas de Jordan.

a) On remarque que A est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de A est donc le plus petit polynôme unitaire qui annule B et C.

On a $B^2 = 2B$, d'où $\mu_B(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$. On a $C = J_3(2)$, d'où $\mu_C(x) = (x-2)^3$. On a donc

$$\mu_A(x) = \mathrm{ppcm}(\mu_B(x), \mu_C(x)) = x(x-2)^3.$$

b) Le polynôme $(x^2 - 2x)^{2007} = x^{2007}(x-2)^{2007}$ est divisible par $\mu_A(x) = x(x-2)^3$. Cela implique

$$(A^2 - 2A)^{2027} = 0.$$

Exercice 3 (4 points)**.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt) Calculer A^4.
b) (1,5 pts) En déduire que A est diagonalisable.
c) (1,5 pts) Démontrer que A a 4 valeurs propres différentes et donner ses valeurs propres.

Solution :

a) On calcule successivement

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

b) On a $A^4 = I$, donc A est annulée par

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i),$$

qui est scindé sur $\mathbb{C}$ et a des racines simples. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Remarque. Il est inutile de mentionner Cayley-Hamilton ici.

c) Les matrices I, A, A^2, A^3 sont clairement linéairement indépendantes. Donc il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré ≤ 3. Ainsi $x^4 - 1$ est le polynôme minimal de A. Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal : $1,\ -1,\ i,\ -i$.

Remarque. On ne peut pas déduire *c*) de *a*) et *b*) immédiatement. On sait que x^4-1 est un polynôme annulateur, mais il faut vérifier que c'est aussi le polynôme minimal. Sinon, on peut imaginer la situation où le polynôme minimal $\mu_A(x)$ est seulement un diviseur de x^4-1.

On sait bien que $\mu_A(x)$ divise x^4-1 et $\chi_A(x)$, et que x^4-1 et $\chi_A(x)$ sont de même degré. Mais cela n'implique pas encore que $\chi_A(x) = x^4-1$.

Exercice 4 (3 points)**.** Soit A une matrice carrée complexe telle que

$$\chi_A(x) = -(x-5)^3(x-8)^4 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(x) = (x-5)^2(x-8)^2.$$

a) (1,5 pts) Déterminer les formes de Jordan possibles de A.

b) (1,5 pts) On ajoute l'information $\mathrm{rg}(A-8I) = 5$. Déterminer alors la forme de Jordan de A.

Solution :

On a

$$\chi_A(x) = -(x-5)^3(x-8)^4, \qquad \mu_A(x) = (x-5)^2(x-8)^2.$$

a) Pour la valeur propre 5, la multiplicité algébrique est 3 et la taille maximale des blocs de Jordan est 2. On a donc un bloc $J_2(5)$ et un bloc $J_1(5)$.

Pour la valeur propre 8, la multiplicité algébrique est 4 et la taille maximale des blocs est 2. On a donc un bloc $J_2(8)$ et

- soit un second bloc $J_2(8)$,
- soit deux blocs $J_1(8)$.

Ainsi, il y a deux formes de Jordan possibles pour A (à permutation des blocs près) :

$$J^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right), \qquad J^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|c|cc|c|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

b) *Méthode 1.* On remarque d'abord que la quantité $\mathrm{rg}(A-8I) = \mathrm{rg}(f-8Id)$ ne dépend pas de la base. On a

$$\mathrm{rg}(J^{(1)}-8I) = 5, \qquad \mathrm{rg}(J^{(2)}-8I) = 4.$$

Ainsi, la forme de Jordan de A est $J^{(1)}$.

Méthode 2. Le nombre de blocs de Jordan de la valeur propre 8 est égal à

$$\dim E_8 = \dim\ker(A-8I) = 7 - \mathrm{rg}(A-8I) = 7-5 = 2.$$

La bonne forme de Jordan de A est donc $J^{(1)}$.

Exercice 5 (3 points)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tel que $f^* = if$.

a) (1,5 pts) Démontrer que toute valeur propre λ de f vérifie $\overline{\lambda} = i\lambda$.

b) (1,5 pts) Soient λ, μ deux valeurs propres différentes de f. Démontrer que tout vecteur de E_λ est orthogonal à tout vecteur de E_μ.

Solution :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $f^* = if$.

a) Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre, $f(x) = \lambda x$. Alors

$$\langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, if(x)\rangle = \langle x, i\lambda x\rangle = i\lambda\,\langle x, x\rangle.$$

D'autre part,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle.$$

Comme $\langle x, x\rangle \neq 0$, on obtient $\overline{\lambda} = i\lambda$.

b) Soient $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. On a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, if(y)\rangle = \langle x, i\mu y\rangle = i\mu\,\langle x, y\rangle.$$

Mais aussi

$$\langle f(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle.$$

Donc

$$\overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle = i\mu\,\langle x, y\rangle.$$

Or $\overline{\mu} = i\mu$ d'après a), on a

$$\overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle = \overline{\mu}\,\langle x, y\rangle.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle x, y\rangle = 0$.

Exercice 6 (4,5 points)**.** On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^2$. Soit $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire telle que la matrice de Gram de φ dans la base $((1,2),(1,0))$ est

$$G = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 pts) La forme φ est-elle hermitienne ?
b) (1,5 pts) La forme φ est-elle définie positive ?
c) (1,5 pts) Écrire une formule explicite pour $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$.

Solution :
a) La forme φ est hermitienne parce que la matrice de Gram G est hermitienne : $G = G^*$.

b) La forme φ n'est pas définie positive parce que $\varphi((1,0),(1,0)) = -1 < 0$.

c) On a $\varphi((1,0),(1,0)) = -1$.
On a

$$i = \varphi((1,2),(1,0)) = \varphi((1,0),(1,0)) + 2\varphi((0,1),(1,0)) = -1 + 2\varphi((0,1),(1,0)),$$

d'où $\varphi((0,1),(1,0)) = \dfrac{1+i}{2}$ et, par hermitianité,

$$\varphi((1,0),(0,1)) = \overline{\varphi((0,1),(1,0))} = \frac{1-i}{2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} 2 = \varphi((1,2),(1,2)) &= \varphi((1,0),(1,0)) + 2\varphi((1,0),(0,1)) + 2\varphi((0,1),(1,0)) + 4\varphi((0,1),(0,1)) \\ &= -1 + 2\cdot\frac{1-i}{2} + 2\cdot\frac{1+i}{2} + 4\varphi((0,1),(0,1)) = 1 + 4\varphi((0,1),(0,1)), \end{aligned}$$

et ainsi $\varphi((0,1),(0,1)) = \dfrac{1}{4}$.

Donc la matrice de Gram de φ dans la base canonique est

$$G' = \begin{pmatrix} \varphi((1,0),(1,0)) & \varphi((1,0),(0,1)) \\ \varphi((0,1),(0,1)) & \varphi((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & (1-i)/2 \\ (1+i)/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & (1-i)/2 \\ (1+i)/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\overline{x}_1 y_1 + \frac{1-i}{2}\overline{x}_1 y_2 + \frac{1+i}{2}\overline{x}_2 y_1 + \frac{1}{4}\overline{x}_2 y_2.$$