L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2025–2026

Examen final

le 16 décembre 2025

2 pages, durée : 2h

Chaque réponse doit être justifiée

Exercice 1 (4 points)**.**
a) (1,5 pts) Donner la définition de la décomposition de Dunford pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$
b) (1 pt) Déterminer la décomposition de Dunford de A. (Vous devez justifier que la décomposition que vous proposez est bien une décomposition de Dunford.)
c) (1,5 pts) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 2 (3,5 points)**.** On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C}).$$
a) (2 pts) Déterminer le polynôme minimal de A.
b) (1,5 pts) Calculer $(A^2 - 2A)^{2027}$.

Exercice 3 (4 points)**.** On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
a) (1 pt) Calculer A^4.
b) (1,5 pts) En déduire que A est diagonalisable.
c) (1,5 pts) Démontrer que A a 4 valeurs propres différentes et donner ses valeurs propres.

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4 (3 points)**.** Soit A une matrice carrée complexe telle que

$$\chi_A(x) = -(x-5)^3(x-8)^4 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(x) = (x-5)^2(x-8)^2.$$

a) (1,5 pts) Déterminer les formes de Jordan possibles de A.

b) (1,5 pts) On ajoute l'information $\mathrm{rg}(A-8I)=5$. Déterminer alors la forme de Jordan de A.

Exercice 5 (3 points)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tel que $f^* = if$.

a) (1,5 pts) Démontrer que toute valeur propre λ de f vérifie $\overline{\lambda} = i\lambda$.

b) (1,5 pts) Soient λ, μ deux valeurs propres différentes de f. Démontrer que tout vecteur de E_λ est orthogonal à tout vecteur de E_μ.

Exercice 6 (4,5 points)**.** On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^2$. Soit $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire telle que la matrice de Gram de φ dans la base $((1,2),(1,0))$ est

$$G = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 pts) La forme φ est-elle hermitienne ?

b) (1,5 pts) La forme φ est-elle définie positive ?

c) (1,5 pts) Écrire une formule explicite pour $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$.