L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2024–2025

EXAMEN SESSION 2 (CORRECTION)

le 23 juin 2025

Durée : 1h30

Chaque réponse doit être justifiée

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (2 pt) Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.

b) (1 pt) Déterminer le polynôme minimal de A.

c) (1,5 pt) Trouver une décomposition de Dunford de A.

d) (1,5 pt) Calculer $\exp(A)$.

Solution.

a) On a

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)(1-x) + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est clairement propre. On prend $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\mu_A(x) = (x-2)$ ou $(x-2)^2$. Vu que $(x-2)$ n'annule pas la matrice, on a $\mu_A(x) = (x-2)^2$.

c) Vu que 2 est la seule valeur propre, on a forcément $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc la décomposition de Dunford est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\exp(A) = \exp(S+N) = \exp(S)\exp(N) = e^2 I \cdot (I+N) = e^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (5,5 points)**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice A dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$ de A.

b) (1 pt) Donner une base de chaque espace propre.

c) (1 pt) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) (1,5 pt) Donner une base de chaque espace propre généralisé.

e) (1 pt) Donner la décomposition de Dunford de A.

Solution.
a) On a
$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = (x-3)^2(x-4).$$
b) Pour $\lambda = 3$, on a
$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc le système est } \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de E_3.

Pour $\lambda = 4$, on a
$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc le système est } \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0.$$
Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de E_4.

c) On a $\dim E_3 = 1$ alors que la multiplicité algébrique de 3 est 2, donc A n'est pas diagonalisable.

d) Pour $\lambda = 4$, $E^4 = E_4 = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour $\lambda = 3$, on calcule $(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela donne le système $x_3 = 0$, d'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de E^3.

e) La matrice est déjà sous forme de Jordan. On voit donc la décomposition de Dunford directement :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (3 points)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+1)^2$.

a) (1 pt) Donner toutes les possibilités pour le polynôme minimal de A.

b) (2 pt) Pour chaque polynôme minimal proposé à la question précédente, donner un exemple explicite d'une matrice ayant ce polynôme minimal (et dont le polynôme caractéristique est bien $(x-2)^2(x+1)^2$). On vous demande une justification détaillée pour au moins une matrice non diagonalisable. Pour les autres matrices, vous pouvez donner la matrice sans justification.

Solution.
a) Le polynôme $\mu_A(x)$ divise $\chi_A(x)$ et a les mêmes racines. Il y a donc 4 possibilités :
$$(x-2)(x+1), \quad (x-2)^2(x+1), \quad (x-2)(x+1)^2, \quad (x-2)^2(x+1)^2.$$
b) Rappelons que pour une matrice de Jordan, le polynôme minimal est de la forme $\prod(x-\lambda_i)^{p_i}$, où p_i est la taille maximale des blocs de Jordan associés à la valeur propre λ_i.

Ainsi, pour les matrices suivantes (déjà sous forme de Jordan), on voit directement le polynôme minimal :

- $\mu(x) = (x-2)(x+1)$ pour
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\mu(x) = (x-2)^2(x+1)$ pour

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\mu(x) = (x-2)(x+1)^2$ pour

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\mu(x) = (x-2)^2(x+1)^2$ pour

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire définie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2\overline{x_1}y_1 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 - 3\overline{x_2}y_2.$$

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$, et $B = (e_1 + e_2,\, e_2)$.
a) (1,5 pt) Donner la matrice de φ dans la base B.
b) (1 pt) En déduire que φ est une forme hermitienne.
c) (1,5 pt) Déterminer si φ est un produit scalaire hermitien.

Solution.
a) On a $e_1 + e_2 = (1, 1)$, $e_2 = (0, 1)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) &= \varphi((1, 1), (1, 1)) = -1, \\ \varphi(e_1 + e_2, e_2) &= \varphi((1, 1), (0, 1)) = i - 3, \\ \varphi(e_2, e_1 + e_2) &= \varphi((0, 1), (1, 1)) = -i - 3, \\ \varphi(e_2, e_2) &= \varphi((0, 1), (0, 1)) = -3. \end{aligned}$$

On obtient donc la matrice suivante :

$$G = \begin{pmatrix} -1 & i-3 \\ -i-3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice G de la question précédente est bien hermitienne ($G = {}^t\overline{G}$). Donc φ est une forme hermitienne.
c) On a :

$$\varphi((0, 1), (0, 1)) = -3 < 0.$$

Donc φ n'est pas un produit scalaire.

Exercice 5 (3,5 points)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
a) (2 pt) Rappeler la définition de l'application adjointe $f^* \colon E \to E$.
b) (1,5 pt) Montrer que chaque vecteur de $\mathrm{Ker}(f^*)$ est orthogonal à chaque vecteur de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution.
a) Par définition, l'adjoint $f^* \colon E \to E$ de f est l'unique application linéaire telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

b) Soit $v \in \mathrm{Ker}(f^*)$, $u \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $w \in E$ tel que $u = f(w)$. On a :

$$\langle u, v \rangle = \langle f(w), v \rangle = \langle w, f^*(v) \rangle = \langle w, 0 \rangle = 0.$$

Donc v est orthogonal à u.