L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2024–2025

Examen (session 2)

le 23 juin 2025

Durée : 1h30

Chaque réponse doit être justifiée

Exercice 1 (6 points). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (2 pt) Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.

b) (1 pt) Déterminer le polynôme minimal de A.

c) (1,5 pt) Trouver une décomposition de Dunford de A.

d) (1,5 pt) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 2 (5,5 points). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice A dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$ de A.

b) (1 pt) Donner une base de chaque espace propre.

c) (1 pt) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) (1,5 pt) Donner une base de chaque espace propre généralisé.

e) (1 pt) Donner la décomposition de Dunford de A.

Exercice 3 (3 points). Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+1)^2$.

a) (1 pt) Donner toutes les possibilités pour le polynôme minimal de A.

b) (2 pt) Pour chaque polynôme minimal proposé à la question précédente, donner un exemple explicite d'une matrice ayant ce polynôme minimal (et dont le polynôme caractéristique est bien $(x-2)^2(x+1)^2$). On vous demande une justification détaillée pour au moins une matrice non diagonalisable. Pour les autres matrices, vous pouvez donner la matrice sans justification.

Exercice 4 (4 points). Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire définie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2\overline{x_1}y_1 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 - 3\overline{x_2}y_2.$$

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$, et $B = (e_1 + e_2,\, e_2)$.

a) (1,5 pt) Donner la matrice de φ dans la base B.

b) (1 pt) En déduire que φ est une forme hermitienne.

c) (1,5 pt) Déterminer si φ est un produit scalaire hermitien.

Exercice 5 (3,5 points). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

a) (2 pt) Rappeler la définition de l'application adjointe $f^* \colon E \to E$.

b) (1,5 pt) Montrer que chaque vecteur de $\mathrm{Ker}(f^*)$ est orthogonal à chaque vecteur de $\mathrm{Im}(f)$.