L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2024–2025

Examen final (correction)

le 18 décembre 2024

Exercice 1 (3 points)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (2 pts) Trouver une matrice inversible P et une matrice réduite de Jordan J telle que $A = PJP^{-1}$.
b) (1 pt) Calculer A^{2025}.

Solution.

a) Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 2 \\ -2 & -1-x \end{pmatrix} = (3-x)(-1-x) - (-2)(2) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

La matrice A est clairement non-diagonalisable (sinon, on aurait $A = I$, ce qui est absurde). La matrice de Jordan pour A est donc :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On veut trouver une base (v_1, v_2) telle que la matrice de l'application linéaire dans cette base soit J. Pour cela, il faut prendre $v_1 \in E_1 \setminus \{0\}$; le vecteur $v_2 \in E^1 = E$ doit être tel que $A \cdot v_2 = v_1 + v_2$ (donc $(A - I) \cdot v_2 = v_1$). Il suffit donc de prendre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si vous prenez $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ au lieu de $v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors vous obtenez $(A - I) \cdot v_2 = 2v_1$ au lieu de $(A - I) \cdot v_2 = v_1$. Dans cet exercice, vous pouvez prendre un vecteur v_2 arbitraire, qui n'est pas dans le noyau de $(A - I)$, puis le multiplier par le scalaire nécessaire pour avoir $(A - I) \cdot v_2 = v_1$.

b) Puisque la seule valeur propre de A est 1, la décomposition de Dunford de A s'écrit sous la forme $A = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente avec $N^2 = 0$. Par conséquent, A^{2025} est donnée par :

$$(I+N)^{2025} = \sum_{k=0}^{2025} \binom{2025}{k} I^{2025-k} N^k = \binom{2025}{0} I^{2025} + \binom{2025}{1} I^{2024} N$$
$$= I + 2025N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2025 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4051 & 4050 \\ -4050 & -4049 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (4 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

une matrice dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

a) (1 pt) Vérifier que $A^3 = 0$.
b) (1 pt) Déduire le polynôme minimal de A puis le polynôme caractéristique de A.
c) (2 pt) Donner la matrice réduite de Jordan équivalente à A.

Solution.
a) Calculons A^2 et A^3 pour vérifier que $A^3 = 0$. On a :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $A^3 = 0$.

b) Puisque $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$, le polynôme minimal de A est $\mu_A(x) = x^3$. Le polynôme caractéristique est donc $\chi_A(x) = x^4$ parce que les racines de $\mu_A(x)$ et $\chi_A(x)$ sont les mêmes.

Remarque. Dans cette question, le théorème de Cayley-Hamilton **ne permet pas** de déduire $\chi_A(x)$ à partir de $\mu_A(x)$.

c) On a $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. On doit donc avoir au moins un bloc $J_3(0)$ parce que $J_1(0)$ et $J_2(0)$ sont annulés par x^2 et le bloc $J_4(0)$ n'est pas annulé par x^3. Donc la matrice réduite de Jordan doit avoir un bloc $J_3(0)$ et un bloc $J_1(0)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (4 points)**.**
a) (1 pt) Donner la définition de la décomposition de Dunford pour une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) (1 pt) Déterminer le polynôme minimal de A.
c) (2 pts) Déterminer les polynômes $s(x)$ et $n(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$ tels que $A = s(A) + n(A)$ est la décomposition de Dunford de A. (On vous demande seulement les polynômes $s(x)$ et $n(x)$. On ne vous demande pas de calculer $s(A)$ et $n(A)$.)

Solution.
a) La décomposition de Dunford d'une matrice A consiste à écrire A comme $A = S + N$, où S est diagonalisable, N est nilpotente et $SN = NS$.
b) On a

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 2-x & 5 \\ 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)^2(-1-x).$$

Pour choisir entre $\mu_A(x) = (x-2)(x+1)$ et $\mu_A(x) = (x-2)^2(x+1)$, il faut vérifier si A est diagonalisable. Le rang de $A - 2I$ est égal à 2, d'où $mg_2 = 1 \neq 2 = ma_2$. Ainsi, A n'est pas diagonalisable, donc

$$\mu_A(x) = (x-2)^2(x+1).$$

c) On a $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$ et $P_1(x) = \frac{\mu_A(x)}{(x-2)^2} = x + 1$ et $P_2(x) = \frac{\mu_A(x)}{x+1} = (x-2)^2$.

Nous devons trouver les coefficients de Bézout $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ qui satisfont l'équation $Q_1(x)P_1(x)+Q_2(x)P_2(x)=1$. Pour ce faire, nous divisons $P_2(x)$ par $P_1(x)$ avec le reste. On obtient $P_2(x)=(x-5)P_1(x)+9$, d'où $9=-(x-5)P_1(x)+P_2(x)$. Ainsi, on peut prendre $Q_1(x)=-\frac{x-5}{9}$ et $Q_2(x)=\frac{1}{9}$.

Cela donne

$$s(x)=\lambda_1 Q_1(x)P_1(x)+\lambda_2 Q_2(x)P_2(x)=-\frac{2(x-5)}{9}(x+1)-\frac{1}{9}(x-2)^2=\frac{-x^2+4x+2}{3},$$

$$n(x)=x-s(x)=\frac{x^2-x-2}{3}.$$

Remarque. Lorsque vous travaillez avec des matrices, si vous avez déjà trouvé la matrice $s(A)$, alors la matrice $n(A)$ se calcule comme suit : $n(A)=A-s(A)$. De même, pour les polynômes, si vous avez déjà calculé $s(x)$, vous pouvez alors prendre $n(x)=x-s(x)$.

Exercice 4 (2 points)**.** Soit n un entier strictement positif. Démontrer qu'il existe une unique matrice hermitienne $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4+A^3+A^2=0$.

Solution.

Puisque A est hermitienne, ses valeurs propres sont réelles. Ces valeurs propres sont parmi les racines du polynôme $x^4+x^3+x^2=x^2(x^2+x+1)$. Or, x^2+x+1 n'a pas de racines réelles ($\Delta<0$), donc la seule valeur propre est 0. Comme A est diagonalisable (étant hermitienne) et que sa seule valeur propre est 0, on doit conclure que $A=0$.

Exercice 5 (2 points)**.** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ une application linéaire et $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de f. On dénote par $E^\lambda(f)$ l'espace propre généralisé associé à la valeur propre λ pour f.

Démontrer que $E^\lambda(f)\subset E^{\lambda^2}(f^2)$.

Solution.

Soit $v\in E^\lambda(f)$. Alors, il existe un entier positif k tel que $(f-\lambda\mathrm{Id})^k(v)=0$. On a donc

$$(f^2-\lambda^2\mathrm{Id})^k(v)=(f+\lambda\mathrm{Id})^k(f-\lambda\mathrm{Id})^k(v)=0,$$

ce qui implique que $v\in E^{\lambda^2}(f^2)$.

Exercice 6 (3 points)**.** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ telles que $f^*=-f$.

a) (1 pt) Démontrer que les valeurs propres de f sont imaginaires pures.

b) (1 pt) Soit $F\subset E$ un sous-espace stable par f. Démontrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

c) (1 pt) Soient λ et μ deux valeurs propres différentes de f. Démontrer que E_λ est orthogonal à E_μ.

Solution. Par définition de f^*, pour tous $v,w\in E$, on a $\langle f(v),w\rangle=\langle v,f^*(w)\rangle$. La condition $f^*=-f$ donne donc

$$\langle f(v),w\rangle=-\langle v,f(w)\rangle.$$

a) Soit λ une valeur propre de f et $v\in E_\lambda\setminus\{0\}$ un vecteur propre associé. On a

$$\langle f(v),v\rangle=-\langle v,f(v)\rangle,$$

mais

$$\langle f(v),v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\overline{\lambda}\langle v,v\rangle,$$

et

$$-\langle v,f(v)\rangle=-\langle v,\lambda v\rangle=-\lambda\langle v,v\rangle.$$

Cela implique que $\overline{\lambda}=-\lambda$, donc λ est un nombre imaginaire pur.

b) Soit $v\in F^\perp$. Nous devons démontrer que $f(v)\in F^\perp$. Il suffit de montrer que $\langle f(v),w\rangle=0$ pour tout $w\in F$. On a

$$\langle f(v),w\rangle=-\langle v,f(w)\rangle=0$$

car $v\in F^\perp$ et $f(w)\in F$ (puisque F est stable par f).

c) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f, et soient $v \in E_\lambda$ et $w \in E_\mu$. Nous devons démontrer que $\langle v, w\rangle = 0$.

On écrit

$$\langle f(v), w\rangle = -\langle v, f(w)\rangle.$$

Puis

$$\langle f(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle = -\lambda\langle v, w\rangle$$

car λ est un nombre imaginaire pur, et on a aussi

$$-\langle v, f(w)\rangle = -\langle v, \mu w\rangle = -\mu\langle v, w\rangle.$$

L'égalité $-\lambda\langle v, w\rangle = -\mu\langle v, w\rangle$ implique donc que $\langle v, w\rangle = 0$ (puisque $\lambda \neq \mu$).

Exercice 7 (4 points)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = -(x-3)(x-8)(x+1)$. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $B^2 + 2B = A$.

a) (1 pt) Vérifier que si un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A, alors BX est également un vecteur propre de A (ou bien $BX = 0$).

b) (1 pt) En déduire que chaque vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.

c) (2 pt) En supposant A fixé comme ci-dessus, déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ satisfaisant $B^2 + 2B = A$.

Solution.

On a clairement $AB = BA$. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On a donc $AX = \lambda X$.

a) On a $ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$. Ainsi, BX (si non nul) est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ.

b) D'après le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$, on voit que chaque espace propre de A a la dimension 1. De plus, BX (si non nul) est un vecteur propre de A associé à la (même !) valeur propre λ. Par conséquent, BX doit être proportionnel à X. Il existe donc un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \mu X$.

c) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A. Nous voulons déterminer le nombre d'applications linéaires $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telles que $g^2 + 2g = f$.

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, d'après *b*), toute application g telle que $g^2 + 2g = f$ doit être diagonalisable dans la même base. On doit donc avoir

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Pour que $g^2 + 2g = f$, il faut que $\mu_1^2 + 2\mu_1 = 3$, $\mu_2^2 + 2\mu_2 = 8$, et $\mu_3^2 + 2\mu_3 = -1$. Ainsi, $\mu_1 = 1$ ou -3 ; $\mu_2 = 2$ ou -4 ; $\mu_3 = -1$. Il y a donc 2 possibilités pour μ_1, 2 possibilités pour μ_2, et une seule possibilité pour μ_3. En tout, il y a donc 4 possibilités pour g (et donc 4 possibilités pour B).