L3 de Mathématiques
Algèbre linéaire 4

Année 2024–2025

Examen final

le 18 décembre 2024

2 pages, durée : 2h

Chaque réponse doit être justifiée

Exercice 1 (3 points)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (2 pts) Trouver une matrice inversible P et une matrice réduite de Jordan J telle que $A = PJP^{-1}$.
b) (1 pt) Calculer A^{2025}.

Exercice 2 (4 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

une matrice dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
a) (1 pt) Vérifier que $A^3 = 0$.
b) (1 pt) Déduire le polynôme minimal de A puis le polynôme caractéristique de A.
c) (2 pt) Donner la matrice réduite de Jordan équivalente à A.

Exercice 3 (4 points)**.**
a) (1 pt) Donner la définition de la décomposition de Dunford pour une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) (1 pt) Déterminer le polynôme minimal de A.
c) (2 pts) Déterminer les polynômes $s(x)$ et $n(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$ tels que $A = s(A) + n(A)$ est la décomposition de Dunford de A. (On vous demande seulement les polynômes $s(x)$ et $n(x)$. On ne vous demande pas de calculer $s(A)$ et $n(A)$.)

Exercice 4 (2 points)**.** Soit n un entier strictement positif. Démontrer qu'il existe une unique matrice <u>hermitienne</u> $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 = 0$.

Exercice 5 (2 points)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On dénote par $E^{\lambda}(f)$ l'espace propre généralisé associé à la valeur propre λ pour f.

Démontrer que $E^{\lambda}(f) \subset E^{\lambda^2}(f^2)$.

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 6 (3 points)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telles que $f^* = -f$.

a) (1 pt) Démontrer que les valeurs propres de f sont imaginaires pures.

b) (1 pt) Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par f. Démontrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

c) (1 pt) Soient λ et μ deux valeurs propres différentes de f. Démontrer que E_λ est orthogonal à E_μ.

Exercice 7 (4 points)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = -(x-3)(x-8)(x+1)$. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $B^2 + 2B = A$.

a) (1 pt) Vérifier que si un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A, alors BX est également un vecteur propre de A (ou bien $BX = 0$).

b) (1 pt) En déduire que chaque vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.

c) (2 pt) En supposant A fixé comme ci-dessus, déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ satisfaisant $B^2 + 2B = A$.