Decembre 2023

Algèbre linéaire et bilinéaire - L3

- **Téléphone éteint (et montre connectée) sur la table, documents interdits**
- **TOUTE SORTIE EST DEFINITIVE**

Exercice 1 (10 pts)**.**
a) Soit
$$A = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
Calculer $exp(A)$ et, pour tout $r \geq 0$, la puissance A^r.
b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
Calculer son polynôme minimal, sa réduite de Jordan et une base de Jordanisation.
c) Soit $q : E \to K$ une forme quadratique du K-espace vectoriel E. Soient v_1, v_2 deux vecteurs isotropes de q. À quelle condition nécessaire et suffisante sur v_1 et v_2, tout vecteur du sous-espace $\langle v_1, v_2 \rangle$ est-il isotrope? Justifier la réponse.
d) Calculer toutes les matrices symétriques positives $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A^7 = 2I$.

Exercice 2 (4 pts)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
a) Démontrer que $Ker(A) = Ker({}^tAA)$.
b) Démontrer que ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
c) Démontrer que $rg(A)$ coincide avec le nombre de valeurs propres strictement positives de ${}^tAA$.

Exercice 3 (6 pts)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, et soit
$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$
a) Donner une relation entre χ_A et χ_B et entre μ_A et μ_B. Justifier le réponse.
b) Démontrer que si B est diagonalisable alors A l'est aussi.
c) Donner un exemple, en le justifiant, de matrice A diagonalisable telle que B ne l'est pas.
d) Démontrer que si B est diagonalisable alors $\mu_A = \mu_B$.
e) Démontrer par recurrence sur $r \in \mathbb{N}$ que
$$B^r = \left(\begin{array}{c|c} A^r & rA^r \\ \hline 0 & A^r \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$
f) Démontrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$. On pourra calculer $\mu_B(B)$.