Decembre 2022

CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Algèbre linéaire et bilinéaire - L3

- **LE QCM DOIT ETRE RENDU ET AVEC LE NUMERO DE COPIE. PAS DE NUMERO = PAS DE CORRECTION**
- **Téléphone éteint et montre sur la table**
- **Documents et calculatrice interdits**
- **TOUTE SORTIE EST DEFINITIVE**
- **Dans le QCM: Entourer la bonne réponse. Bonne réponse = +0,5. Mauvaise réponse = -0,5. Pas de réponse = 0. Justification correcte = +1. La note globale du QCM ne sera pas inférieure à 0.**
- **Notation pour le QCM.** Pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$, $E_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ est la matrice ayant des zero partout sauf à la place (i, j) où il y a 1.

Exercice 1 (3 pts)**.**
a) Soit $b \in \mathscr{L}_2^s(\mathbb{R}^n)$. Définir la signature de b, $sgn(b)$. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Définir la signature de A, $sgn(A)$.
b) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $sgn(A) = (r, s)$ si et seulement si A a exactement r valeurs propres strictement positives et s valeurs propres strictement negatives.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mu_A(x) = (x-1)(x-2)^2$. Écrire, dans ce cas, une formule pour $exp(A)$. Pour avoir les points il faut justifier la réponse.

Exercice 3 (2 pts)**.** Soit $p(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ et soit A sa matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $p(x)$, A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? Pour avoir les points il faut justifier la réponse.