L3-M 2024-2025
17 décembre 2024

Examen - Aglèbre et Géométrie pour l'enseignement
Toute réponse doit être justifiée

Questions de Cours : Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$.

1. Donner la définition d'une application affine $f : E \to G$ où G est un espace affine de direction $\vec{G}$.

2. Donner la définition des coordonnées d'un point M dans un repère $(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de E.

3. Dans cette question on suppose que E est un espace affine euclidien.
Montrer que la composée de deux isométries de E est une isométrie.

Exercice 1:
Théorème de Pasch : Soient A, B, C trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite intersectant $]AB[$.
Alors une seule de ces trois situations se produit : $C \in \mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}$ coupe $]AC[$ ou $\mathcal{D}$ coupe $]BC[$.

Montrer que le Théorème de Pasch implique l'axiome O4.

> **O.4 :** Soient trois points A, B, C non alignés et hors d'une droite $\mathcal{D}$.
>
> - Si A et B sont du même côté de $\mathcal{D}$, B et C sont du même côté de $\mathcal{D}$, alors A et C sont du même côté de $\mathcal{D}$.
> - Si A et B ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, B et C ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, alors A et C sont du même côté de $\mathcal{D}$.

Exercice 2: Soit E un plan affine.
On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit M un point du segment $[BD]$.
- Le point N est le symétrique de C par rapport à M.
- La parallèle à (AB) passant par N coupe (AD) en P.
- La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en Q.

On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Faire un dessin.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD).

3. Notons m l'abscisse de M. Quelle est l'ordonnée de M en fonction de m.

4. Déterminer l'expression analytique de la symétrie centrale par rapport à M.

5. Quelles sont les coordonnées de N, P et Q en fonction de m.

6. Démontrer que les points P, M et Q sont alignés et que la droite (PQ) garde une direction fixe quel que soit le point M choisi.

Exercice 3: On considère l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique.
Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Est-ce que h est une isométrie ? Justifier.

Exercice 4: ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm.

1. Construire I le barycentre de $\{(A,1),(B,1)\}$, puis G le barycentre de la famille $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$.

2. Prouver que $ACBG$ est un losange.

3. Quel est l'ensemble Γ des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$?

4. Vérifier que le milieu de $[AB]$ appartient à Γ. Tracer Γ.

Exercice 5: Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ on considère la transformation f définie comme suit : si $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est l'image par f de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{cases} x' = & -y+3 \\ y' = & x-1 \end{cases}$$

a. Calculer les coordonnées de O', I', J' les images par f des points O, I, J.

b. Montrer que le repère $(O';\overrightarrow{O'I'};\overrightarrow{O'J'})$ est orthonormé.

c. Montrer que f est une isométrie, est-elle directe ?

d. Déterminer l'ensemble des points fixes par f et reconnaître f.

e. Préciser les éléments qui caractérisent f.

f. Calculer l'image par f de la droite d'équation $2x-y-1=0$.