L3-M 2023-2024

Examen - Aglèbre et Géométrie pour l'enseignement
21 décembre 2023

Questions de Cours :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble non vide F d'un espace affine E soit un sous-espace affine de E.

2. Soient F et G deux sous-espaces affines d'un espace affine E avec $A \in F$ et $B \in G$.
Montrer que $F \cap G \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \vec{F} + \vec{G}$.

3. Soient E un plan affine euclidien et $f : E \to E$ une isométrie.
Montrer que si f fixe trois points non-alignés de E, alors f est l'identité.

Exercice 1: On suppose $A * B * C$ et $A * D * E$ et que les points A, C et E ne sont pas alignés. Utilisant les axiomes d'Euclide nous voudrons montrer que les segments $[BE]$ et $[CD]$ sont sécantes.

1. Faites un dessin. Pourquoi est-ce que les points B et E sont distincts ?

2. Montrer que les droites (BE) et (CD) sont distinctes.

3. Montrer par l'absurde que le segment $[BE]$ et la droite (CD) sont sécantes.
De même montrer que le segment $[CD]$ et la droite (BE) sont sécantes.

4. Pourquoi ces deux points d'intersections coincïdent ? Conclure.

Exercice 2: Soient E un espace affine euclidien et ABC un triangle équilatéral. Notons G le barycentre du système des points pondérés $((A, 1), (B, 1), (C, 2))$ et H le barycentre du système $((B, 1), (C, 3))$.

1. Faire un dessin et place G et H en justifiant.

2. Réduire les sommes $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

3. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$.
Représenter cet ensemble sur le dessin.

Exercice 3: Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine usuelle.

1. F désigne le sous-espace affine d'équation $x + y - 2z = 3$. Quelle est la direction de F ?

2. Soit G le sous-espace affine de direction $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donner une représentation paramétrique de G.

3. Notons $p : E \to$ la projection sur G parallèlement à $\vec{F}$.
Déterminer les coordonnées de $p(M)$ pour un point M quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4: On considère les isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\rho\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y-2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la nature des isométries ρ et σ en précisant les éléments qui les définissent.

2. Posons $\tau = \sigma \circ \rho$. Quelle est la nature de cette isométrie ?

3. Montrer que τ^2 est une translation.
Donner la relation entre le vecteur de translation de τ^2 et l'application τ.

Exercice 5: Soit $f : E \to E$ une application affine d'un espace affine E de direction $\vec{E}$.

1. Supposons f a un point fixe O.

a. Soit $M \in E$ et posons $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Montrer que $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{f}(\vec{u}) - \vec{u}$.

b. En déduire que l'ensemble $Fix(f)$, des points fixes de f est un sous-espace affine de E de direction $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.

2. Supposons que f admet un unique point fix. Montrer alors que $(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ est bijective.

3. Supposons que $(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ est bijective.

a. Soit $A \in E$ un point quelconque.
Pourquoi est-ce qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{f}(\vec{u}) - \vec{u}$.

b. Montrer que le point X tel que $\overrightarrow{XA} = \vec{u}$ est un point fixe de f.

Exercice 6: Soit F le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x - 2y + 2z = -2$ et soit G la droite affine passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $\vec{G} = vect \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que F et G sont orthogonaux, puis qu'ils sont perpendiculaire.

b. Déterminer la projection orthogonale sur F parallèlement à $\vec{G}$.

Exercice 7: Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

a. Notons $t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

b. Pour $A \in \mathcal{P}$ notons σ_A, la rotation de centre A et d'angle π.
Si $M' = \sigma_A(M)$, montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'A}$. En déduire $\overrightarrow{\sigma_A}$.

c. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. Montrer que $\sigma_B \circ \sigma_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

d. Soient C et D deux points de $\mathcal{P}$. Utilisant la question précédente, montrer que

  i. $\sigma_C \circ t_{\vec{u}} = \sigma_D$ avec $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

  ii. $t_{\vec{u}} \circ \sigma_C = \sigma_E$ avec $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

Exercice 8: Soient $n \geq 2$ un entier et $((P_1, \lambda_1), \ldots, (P_n, \lambda_n))$ un système de n points pondérés d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de poids total $\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$.
On rappelle que le barycentre du système de points pondérés $((P_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$ est l'unique point $G \in \mathcal{P}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

a. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{P} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \lambda \overrightarrow{MG}$.

b. Pour cette question notons G' le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta))$ avec $A \neq B$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

  i. Montrer que $\overrightarrow{AG'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

  ii. Dans une figure représenter G' pour le système $((A, 2), (B, -1))$.

c. Etant donnés trois points distincts A, B, C du plan $\mathcal{P}$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$, on note $m = \alpha + \beta$ et G' le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta))$.

  i. Démontrer que le barycentre du système $((G', m), (C, \gamma))$ est égal au barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.

  ii. Sur un dessin, placer le barycentre G, du système $((A, 2), (B, -1), (C, 1))$. Puis montrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

d. $ABCD$ est un carré.

  i. Quel est l'ensemble E des points M tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB$?

  ii. Représenter cet ensemble E. (avec règle et compas)

Exercice 9: Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel.

a. (Cours) Montrer que $\overrightarrow{E}$ peut-être considérer comme un espace affine si on pose $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$.

b. Soit F un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\vec{0} \in F$.
Indication : donner d'abord la définition d'un sous-espace affine et faire un dessin dans le plan.