Examen - Aglèbre et Géométrie pour l'enseignement
Deuxième session

Exercice 1: Soit $\mathcal{D}$ une droite de Π. On définit la relation suivante sur $\Pi \setminus \mathcal{D}$ par

$$A \sim B \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont du même côté de } \mathcal{D}$$

a. Pourquoi $\sim$ est réflexive ?
b. Justifier que $[AB] = [BA]$ et en déduire que $\sim$ est symétrique.
c. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
d. Justifier qu'il existe un point $A \notin \mathcal{D}$ et puis qu'il existe un point $M \in \mathcal{D}$.
e. Justifier qu'il existe un point B tel que $A * M * B$.
f. Montrer que les classes d'équivalence de $\sim$ sont $\mathrm{cl}(A)$ et $\mathrm{cl}(B)$.

Exercice 2: Soit $[AB]$ un segment de longueur c et soient a et m deux nombres réels strictement positifs.

a. Quelle est la condition sur a, c et m, pour qu'il existe un triangle ABC dont $[BC]$ est de longueur a et la médiane issue de A de longueur m ? Justifier.
b. Construire tous les triangles ABC dont $a = 3$cm, $c = 2.5$cm et $m = 2$cm.

Exercice 3: Avec une règle et un compas construire un segment de longueur $\sqrt{6}$. Justifier. L'unité de mesure est : $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

Exercice 4: On considère le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé et on désigne par $r_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ. Pour tout $M \in P$, notons $M' := r_{\Omega,\theta}(M)$.

a. Exprimer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M, Ω et l'angle θ.

b. Application : Si A et B, de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ respectivement, sont les deux sommets opposés d'un carré, déterminer les coordonnées des deux autres.

Exercice 5: Soient P un plan affine de direction $\vec{P}$ et A, B, C des points non-alignés de P.

a. Notons G le barycentre de $\{(A, 6), (B, -2)\}$ et H le barycentre de $\{(A, 2), (B, -1/2), (C, -1/2)\}$. Sur une figure, placer les points A, B, C, G et H.

b. Soit $f : P \to P$ une application affine telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Montrer que $f = id$.

Exercice 6: Notons Δ l'ensemble de toutes les droites de Π. La formule logique de l'axiome **I.1** est

$$\forall (P,Q) \in \Pi^2 \text{ tels que } P \neq Q,\ \exists! \text{ droite } \mathcal{D} \in \Delta \text{ telle que } P \in \mathcal{D} \text{ et } Q \in \mathcal{D}$$

Ecrire les formules logiques correspondant aux axioms **I.1** et **I.2** et leurs négations.

Exercice 7: Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$ une famille de points pondérés d'un espace affine euclidien E de direction $\vec{E}$.

a. (Cours) On considère l'application $f : E \to \vec{E}$ définie par $f(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$. Montrer que f est soit constante soit une bijection.

b. (Cours) Supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.
Soit $G \in E$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
- $\exists A \in E \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \overrightarrow{AG}$.
- $\forall B \in E \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \overrightarrow{BG}$.

c. Lorsque $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ donner la définition du barycentre de la famille des points pondérés $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$.

d. Si $M \in [AB]$, montrer que M est le barycentre de $\{(A, MB), (B, MA)\}$.

e. Lorsque $M \in (AB) \setminus [AB]$, exprimer M comme barycentre de A et B.

Exercice 8: Soient σ_1, σ_2, σ_3 et τ les isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\sigma_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ 2-y \end{pmatrix},\quad \sigma_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6-x \\ 10-y \end{pmatrix},\quad \sigma_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y+1 \\ -x+2y+1 \end{pmatrix},\quad \tau\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la nature des isométries suivantes en précisant les éléments qui les définissent :

$$\sigma_1, \quad \sigma_3, \quad \sigma_1 \circ \sigma_2, \quad \sigma_1 \circ \tau$$

Exercice 9: Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

a. Notons $t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

b. Pour $A \in \mathcal{P}$ notons σ_A, la rotation de centre A et d'angle π.
Si $M' = \sigma_A(M)$, montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'A}$. En déduire $\overrightarrow{\sigma_A}$.

c. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. Montrer que $\sigma_B \circ \sigma_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

d. Soient C et D deux points de $\mathcal{P}$. Utilisant la question précédente, montrer que

  i. $\sigma_C \circ t_{\vec{u}} = \sigma_D$ avec $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u}$
  ii. $t_{\vec{u}} \circ \sigma_C = \sigma_E$ avec $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

Exercice 10: Soient $n \geq 2$ un entier et $((P_1, \lambda_1), \dots, (P_n, \lambda_n))$ un système de n points pondérés d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de poids total $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i \neq 0$.
On rappelle que le barycentre du système de points pondérés $((P_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$ est l'unique point $G \in \mathcal{P}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

a. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{P} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \lambda \overrightarrow{MG}$.

b. Pour cette question notons G' le barycentre du système $((A,\alpha),(B,\beta))$ avec $A \neq B$ et $\alpha+\beta \neq 0$.

   i. Montrer que $\overrightarrow{AG'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

   ii. Dans une figure représenter G' pour le système $((A,2),(B,-1))$.

c. Etant donnés trois points distincts A, B, C du plan $\mathcal{P}$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$, on note $m = \alpha+\beta$ et G' le barycentre du système $((A,\alpha),(B,\beta))$.

   i. Démontrer que le barycentre du système $((G',m),(C,\gamma))$ est égal au barycentre du système $((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$.

   ii. Sur un dessin, placer le barycentre G, du système $((A,2),(B,-1),(C,1))$. Puis montrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

d. $ABCD$ est un carré.

   i. Quel est l'ensemble E des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$?

   ii. Représenter cet ensemble E. (avec règle et compas)