L3GC
16 décembre 2025
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques : Probabilités & Statistiques

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et tout objet connecté (en particulier les montres) doivent être éteints et rangés dans un sac sur le bord de l'amphi. Les documents sont interdits, une feuille A4 recto manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice type collège ou bien scientifique en mode examen (doit clignoter).
Barème indicatif : 6+10+4

Exercice 1 (Cours): Soit $(Y_i)_{i\leq n}$ une suite de variables aléatoires iid, on pose $p = P(Y_1 \geqslant 0)$. On définit une suite de variables aléatoires X_i par

$$\begin{cases} X_i(\omega) = 1 \text{ si } Y_i(\omega) \geqslant 0 \\ X_i(\omega) = 0 \text{ si } Y_i(\omega) < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X_i, on pose $N_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, quelle est la loi de N_1 ?
2. Appliquer le théorème centrale limite à la suite de variables aléatoires (X_i).
3. Pour n variables aléatoires Y_i, on note N_2 le nombre de Y_i strictement négatifs, quelles est la lois de N_2 ?
4. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?
5. Montrer que lorsque n est grand, la variable aléatoire $C = \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_2-np_2)^2}{np_2}$ suit une loi proche d'une loi de chi deux à 1 degré de liberté.

Exercice 2 (Lois absolument continues.): Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, $f_{a,\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-a)} & \text{si} \quad t \geqslant a \\ 0 & \text{si} \quad t < a. \end{cases}$

On dit qu'une variable aléatoire suit une loi $\mathcal{E}(a, \lambda)$ lorsque elle admet pour densité $f_{a,\lambda}$. Soit $X \sim \mathcal{E}(a, \lambda)$ et (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, on note $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$, on pourra admettre que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et tout réel a, $I_n = \displaystyle\int_a^\infty (t-a)^n e^{-\lambda(t-a)}\, \mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, ainsi $I_4 = \frac{24}{\lambda^5}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de λ et de a.
2. Déterminer la fonction de répartition de X, notée $F_X(x)$.
3. En déduire que pour tout réel b si $Y \sim \mathcal{E}(a, \lambda)$ alors $Y + b \sim \mathcal{E}(a + b, \lambda)$
4. Calculer si $a = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ en fonction de λ. En déduire $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ pour $a \neq 0$.
5. Déterminer $\mathbb{E}(\overline{X})$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X})$.
6. On pose $Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$, montrer que $P(Y_n > \alpha) = P(X_1 > \alpha)P(X_2 > \alpha)...P(X_n > \alpha)$, déterminer la fonction de répartition de Y_n en déduire que $Y_n \sim \mathcal{E}(a, n\lambda)$.
7. Montrer que $U = \frac{nY_n - \overline{X}}{n-1}$ est un estimateur sans biais de a.
8. Proposer V un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.
9. Donner une estimation ponctuelle de a et λ pour le jeu de données : 2 ;3 ;3 ;6 ;8 ;20.
10. Soit $x_1, x_2, ..., x_{400}$ les données d'un échantillon modélisé par des variables aléatoires de loi $\mathcal{E}(a, 1)$, dont on ne connaît pas a, sachant que $\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400} x_i = 5$, déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour a.

Exercice 3: Deux catalyseurs sont analysés pour comparer le rendement moyen d'un processus chimique avec chacun d'eux.
Le catalyseur 1 est actuellement utilisé, mais on envisage d'utiliser le catalyseur 2 plus cher mais plus prometteur. On voudrait savoir si l'utilisation du catalyseur 2 améliore le rendement moyen que l'on a actuellement avec le catalyseur 1. Une expérience est effectuée dans l'usine pilote sur 16 réactions (8 avec chacun des catalyseurs) et aboutit aux données du tableau ci-contre. On suppose que les rendements suivent des lois normales de même variance.

	Catalyseur 1	Catalyseur 2
Moyenne	94,12	95,74
Ecart-type	2,1	2,4
Nombre	8	8

Construire un test au niveau 95% pour décider si l'on doit adopter le catalyseur 2 ou pas. On explicitera clairement le modèle choisi avec ses hypothèses, les hypothèses H_0 et H_1, la variable aléatoire utilisée pour le test, la forme du test, la règle de décision, et enfin la conclusionÉtudier la p-valeur associée au test. Conclure.