Proba Stat G.C. _ 13 Janvier 2025

Exo 1.1: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$ $\quad$ $\mathrm{Cov}(X;Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)$

1.2: $\mathrm{Var}(aX) = \mathbb{E}\left((aX-\mathbb{E}(aX))^2\right) = \mathbb{E}\left((aX-a\,\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\,\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a^2 \mathrm{var}X$

1.3. $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{independance}}{=\!=\!=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

1.4. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))(X-\mathbb{E}(X))\right) = \mathrm{Cov}(X;Y)$.

$\mathrm{cov}(X;Y_1+Y_2) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y_1+Y_2-\mathbb{E}(Y_1+Y_2))\right) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y_1-\mathbb{E}(Y_1)) + (X-\mathbb{E}(X))(Y_2-\mathbb{E}(Y_2))\right) = \mathrm{cov}(X,Y_1) + \mathrm{cov}(X;Y_2)$

$\mathrm{Cov}(X-E(X);Y-\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}\left(\left[(X-E(X)) - \underbrace{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))}_{0}\right]\left[(Y-\mathbb{E}(Y)) - \underbrace{\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}(Y))}_{0}\right]\right) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) = \mathrm{cov}(X;Y)$

1.5: $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i;\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\mathrm{cov}(X_i;X_j)}_{\to\ =\sigma^2 \text{ si } j=i \text{ et } =\gamma \text{ si } j\neq i} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+(n-1)\gamma\right) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{n-1}{n}\gamma$

1.6: $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{n-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_iY_i) - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_iY_j)$ or $\mathbb{E}(X_iY_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ \gamma & \text{si } i=j \end{cases}$

$= \frac{1}{n-1}n\gamma - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\gamma = \frac{n\gamma}{n-1} - \frac{n}{n(n-1)}\gamma = \gamma$.

Exercice 2 :

2.1: $P(X\in\mathbb{R}) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(t)\,dt = a\,I_2 = a\frac{2}{\lambda^3}$ donc $a = \frac{\lambda^3}{2}$

Etude de f_λ sur $\mathbb{R}^+$

$f_\lambda'(t) = 2ate^{-\lambda t} - a\lambda t^2e^{-\lambda t}$
$= ate^{-\lambda t}(2-\lambda t)$

$$\begin{array}{c|ccccc} t & 0 & & \frac{2}{\lambda} & & +\infty \\ \hline f_\lambda & 0 & \nearrow & & \searrow & 0 \end{array}$$

max $f_\lambda = f_\lambda\left(\frac{2}{\lambda}\right)$.

2.2: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_\lambda(t)\,dt = \int_0^{\infty} at^3e^{-\lambda t}\,dt = a\,I_3 = \frac{\lambda^3}{2}\cdot\frac{6}{\lambda^4} = \frac{3}{\lambda}$

2.3: $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\lambda(t)\,dt = a\,I_4 = \frac{\lambda^3}{2}\cdot\frac{24}{\lambda^5} = \frac{12}{\lambda^2}$. $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{12}{\lambda^2} - \frac{9}{\lambda^2} = \frac{3}{\lambda^2}$.

2.4: $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X) = \frac{3}{\lambda}$ et $\mathrm{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathrm{var}(X) = \frac{3}{n\lambda^2}$.

2.5: $V(\lambda) = a^n\, x_1^2x_2^2\dots x_n^2\, e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)} = \left(\frac{\lambda^3}{2}\right)^n x_1^2x_2^2\dots x_n^2\, e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)}$ $\quad$ Posons $K = 2^{-n}x_1^2x_2\dots x_n^2$, $s = x_1+x_2\dots+x_n$.

$V(\lambda) = K\lambda^{3n}e^{-\lambda s}$ $\quad$ $V'(\lambda) = K\left(3n\lambda^{3n-1}e^{-\lambda s} - s\lambda^{3n}e^{-\lambda s}\right) = K\lambda^{3n-1}e^{-\lambda s}(3n - s\lambda)$.

$$\begin{array}{c|ccccc} \lambda & 0 & & \frac{3n}{s} & & \\ \hline V' & & + & 0 & - & \\ V & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

La vraissemblance est maximale pour $\lambda = \frac{3n}{s} = \frac{3}{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}}$

L'estimateur du max de vraissemblance est donc $\hat{\lambda} = \frac{3}{\bar{X}}$. Ce qui est coherent avec le fait que $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{\lambda}$

2.6: $\hat{\lambda}(\omega) = \frac{3\times 6}{27} = \frac{2}{3}$

2.7: Appliquons l'approximation centrale à la suite de V.A. iid X_i

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{\lambda}$ $\quad$ $\mathrm{var}(X_i) = \frac{3}{\lambda^2}$ $\qquad$ $\frac{\bar{X}-\frac{3}{\lambda}}{\frac{\sqrt{3}}{\lambda}}\sqrt{300}$ suit une loi proche d'une $\mathcal{N}(0;1)$

Donc $\mathbb{P}\left(-1{,}96 \leq \left(\frac{\lambda\bar{X}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)\sqrt{300} \leq 1{,}96\right) = 95\%$ d'où $\mathbb{P}\left(\sqrt{3} - \frac{1{,}96}{\sqrt{300}} \leq \frac{\lambda\bar{X}}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{3} + \frac{1{,}96}{\sqrt{300}}\right) = 95\%$

on obtient alors $I_{95} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\bar{X}}\left(\sqrt{3} - \frac{1{,}96}{\sqrt{300}}\right); \frac{\sqrt{3}}{\bar{X}}\left(\sqrt{3} + \frac{1{,}96}{\sqrt{300}}\right)\right] = \left[\frac{3}{\bar{X}} - \frac{1{,}96\sqrt{3}}{\bar{X}\sqrt{300}}; \frac{3}{\bar{X}} + \frac{1{,}96\sqrt{3}}{\bar{X}\sqrt{300}}\right]$ $\quad$ $I_{95}(\omega) = [5{,}60; 6{,}39]$

Exercice 3:

On a I populations et un echantillon de taille n_i de chaque population. le $j$ieme individu de l'echantillon de la population i est modelisé par 1 V.A. Y_{ij}

$Y_{ij} = A_i + \varepsilon_{ij}$ avec A_i constant et $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ $\quad$ ε_{ij} iid en particulier σ^2 est le même pour toutes les populations.

ici $I = 3$ $\quad$ $n_1 = n_2 = n_3 = 3$

H_0: $A_1 = A_2 = A_3$ et H_1: $A_1 \neq A_2$ ou $A_1 \neq A_3$ ou $A_1 \neq A_3$

Sous H_0: $F = \frac{SSE/2}{SSR/6}$ suit une loi de Fisher de paramètre $(2;6)$.

ici $SSE = \sum 3(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \simeq 9{,}28$ $\qquad$ $SST = 9\times S^2$ $\qquad$ $SSR = 3S_1^2 + 3S_2^2 + 3S_3^2 = 48{,}1$

ici on a donc $F(\omega) \simeq 0{,}58$ à comparer à la valeur de la loi de Fisher : $5{,}14$

donc $F(\omega) \leqslant 5{,}14$ on conclut H_0, les differences observées ne sont pas significatives pour conclure à une difference de resistance entre CBO, CCV33 et CCV43